CAPÍTULO I
Análise Combinatória

I. Introdução

1. A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos **agrupamentos formados sob certas condições**.

À primeira vista pode parecer desnecessária a existência desses métodos. Isto de fato é verdade, se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho torna-se quase impossível sem o uso de métodos especiais.

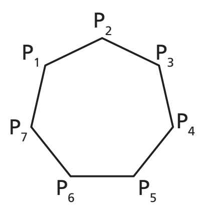
Vejamos alguns exemplos. Usaremos a notação #M para indicar o número de elementos de um conjunto M.

2. Exemplos:

1º) A é o conjunto de números de dois algarismos distintos formados a partir dos dígitos 1, 2 e 3.

$A = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$ e $\#A = 6$

2º) B é o conjunto das diagonais de um heptágono



$B = \{\overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_4}, \overline{P_1P_5}, \overline{P_1P_6}, \overline{P_2P_4}, \overline{P_2P_5}, \overline{P_2P_6}, \overline{P_2P_7}, \overline{P_3P_5},$
$\overline{P_3P_6}, \overline{P_3P_7}, \overline{P_4P_6}, \overline{P_4P_7}, \overline{P_5P_7}\}$
e $\#B = 14$.

3º) C é o conjunto das sequências de letras que se obtêm, mudando a ordem das letras da palavra ARI (anagramas da palavra ARI).

C = {ARI, AIR, IRA, IAR, RAI, RIA} e #C = 6

4º) D é o conjunto de números de três algarismos, todos distintos, formados a partir dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

D = {123, 124, 125, ..., 875, 876}

Pode-se perceber que é trabalhoso obter todos os elementos (agrupamentos) desse conjunto e depois contá-los. Corre-se o risco de haver omissão ou repetição de agrupamentos. Usando técnicas que iremos estudar adiante, veremos que #D = 336.

II. Princípio fundamental da contagem

3. Tal princípio consta de duas partes (A e B) ligeiramente diferentes. Antes de enunciar e demonstrar este princípio, vamos provar dois lemas (teoremas auxiliares).

4. Lema 1

Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

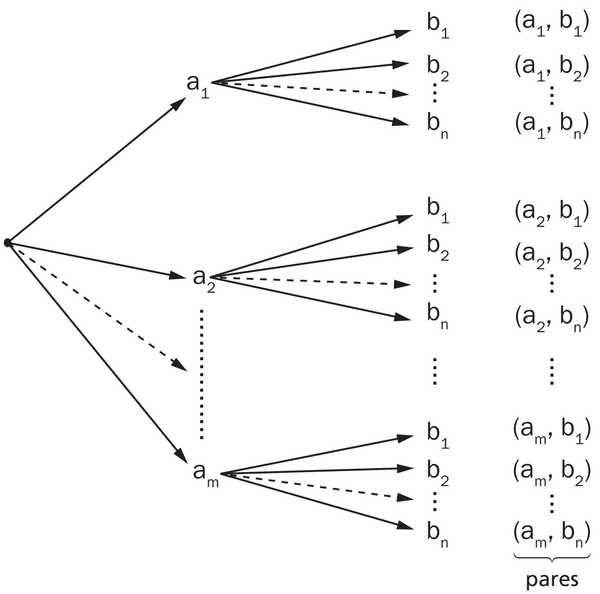
Demonstração:

Fixemos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo. Teremos:

$$m \text{ linhas} \begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_n) \to n \text{ pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_2, b_n) \to n \text{ pares} \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), ..., (a_m, b_n) \to n \text{ pares} \end{cases}$$

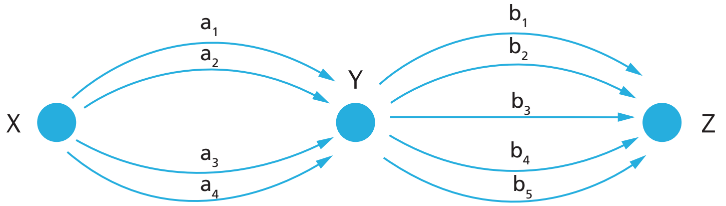
O número de pares ordenados é então $\underbrace{n + n + n + ... + n}_{m \text{ vezes}} = m \cdot n$.

Uma outra forma de visualisarmos os pares ordenados é através do diagrama a seguir, conhecido como **diagrama sequência** ou **diagrama de árvore**.



5. Exemplos:

1º) Temos três cidades X, Y e Z. Existem quatro rodovias que ligam X com Y e cinco que ligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas podemos chegar até Z?



Sejam:
A o conjunto das rodovias que ligam X com Y e
B o conjunto das rodovias que ligam Y com Z:

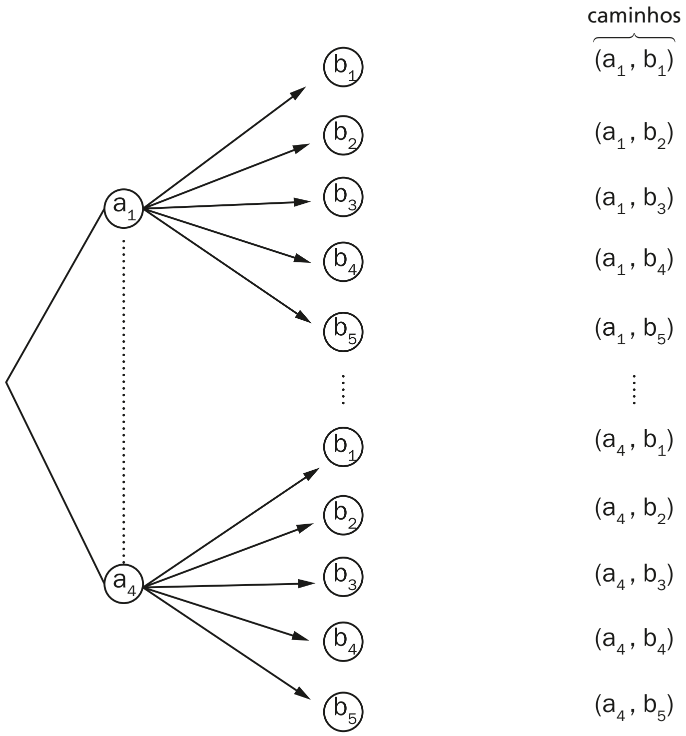
$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

Cada modo de efetuar a viagem de X até Z pode ser considerado como um par de estradas (a_i, b_j) em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Logo, o número de pares ordenados (ou de modos de viajar de X até Z) é

$$4 \cdot 5 = 20.$$

Os caminhos possíveis podem ser obtidos no diagrama de árvore.



2º) Quantos números de dois algarismos (distintos ou não) podem ser formados, usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

Cada número pode ser considerado um par de dígitos (a, b) em que $a \in \{1, 2, 3, ..., 8\}$ e $b \in \{1, 2, 3, ..., 8\}$.

Logo, o resultado procurado é:

$8 \cdot 8 = 64$

6. Lema 2

O número de pares ordenados (a_i, a_j) tais que:
$a_i \in A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $a_j \in A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $a_i \neq a_j$ (para $i \neq j$) é $m(m - 1)$

Demonstração:
Fixemos o primeiro elemento do par, e façamos variar o segundo.

Teremos:

$$m \text{ linhas} \begin{cases} (a_1, a_2), (a_1, a_3), \ldots, (a_1, a_m) & \to (m-1) \text{ pares} \\ (a_2, a_1), (a_2, a_3), \ldots, (a_2, a_m) & \to (m-1) \text{ pares} \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \\ (a_m, a_1), (a_m, a_2), \ldots, (a_m, a_{m-1}) & \to (m-1) \text{ pares} \end{cases}$$

O número de pares é:

$$\underbrace{(m-1) + (m-1) + \ldots + (m-1)}_{m \text{ vezes}} = m \cdot (m-1)$$

7. Exemplo:

Quantos números com dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8?

Cada número pode ser considerado um par de dígitos (a, b) em que:

$$a \in \{1, 2, 3, \ldots, 8\},\ b \in \{1, 2, 3, \ldots, 8\} \text{ e } a \neq b$$

Então o resultado procurado será $8 \cdot 7 = 56$.

Observemos que o diagrama de árvore pode ser usado para obtermos os números formados, notando apenas que, uma vez tomado um elemento na 1ª etapa do diagrama, ele não poderá aparecer na 2ª etapa.

8. O princípio fundamental da contagem (parte A)

Consideremos *r* conjuntos

$$\begin{array}{ll} A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\} & \#A = n_1 \\ B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\} & \#B = n_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \quad \vdots \\ Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{n_r}\} & \#Z = n_r \end{array}$$

então, o número de *r*-uplas ordenadas (sequências de *r* elementos) do tipo

$$(a_i, b_j, \ldots, z_p)$$

em que $a_i \in A$, $b_j \in B \ldots z_p \in Z$ é

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$$

Demonstração (Princípio da indução finita)

Se $r = 2$, é imediato, pois caímos no lema 1 já visto.

Suponhamos que a fórmula seja válida para o inteiro $(r - 1)$ e provemos que ela também é válida para o inteiro r.

Para $(r - 1)$, tomemos as sequências de $(r - 1)$ elementos $(a_j, b_j, ..., w_k)$.

Por hipótese de indução, existem $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{r-1}$ sequências e n_r elementos pertencentes ao conjunto Z.

Cada sequência $(a_i, b_j, ..., w_k, z_p)$ consiste de uma sequência $(a_i, b_j, ..., w_k)$ e um elemento $z_p \in Z$.

Portanto, pelo lema 1, o número de sequências do tipo $(a_i, b_j, ..., w_k, z_p)$ é:

$$(n_1 \cdot n_2 \dots n_{r-1}) \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{r-1} \cdot n_r$$

Decorre então que o teorema é válido $\forall r \in \mathbb{N}$ e $r \geqslant 2$.

9. Exemplo:

Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de **cara** e **coroa**?

Indiquemos por K o resultado **cara** e por C o resultado **coroa**.

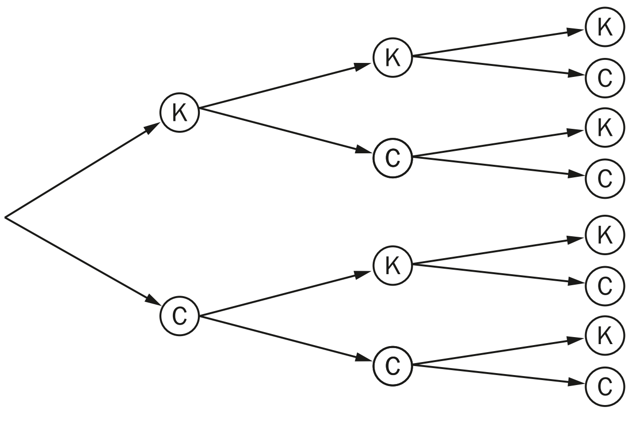
Queremos o número de triplas ordenadas (a, b, c), em que:

$$a \in \{K, C\}, b \in \{K, C\} \text{ e } c \in \{K, C\}$$

Logo, o resultado procurado é:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

As sequências podem ser obtidas através de um diagrama de árvore.



resultados

(K, K, K)

(K, K, C)

(K, C, K)

(K, C, C)

(C, K, K)

(C, K, C)

(C, C, K)

(C, C, C)

10. O princípio fundamental da contagem (parte B)

Consideremos um conjunto A com $m(m \geqslant 2)$ elementos. Então o número de r-uplas ordenadas (sequências com r elementos) formadas com elementos distintos dois a dois de A é:

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}$$

Ou seja, se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, o número de sequências do tipo

$$\underbrace{(a_j, a_\ell, \ldots, a_i, \ldots, a_k)}_{r \text{ elementos}}$$

com $\begin{cases} a_i \in A \; \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \\ a_i \neq a_p \text{ para } i \neq p \end{cases}$ é

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}$$

A demonstração é feita por indução finita, de modo análogo à feita na parte A.

11. Exemplos:

1º) Quatro atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1º, 2º e 3º lugares?

Cada resultado consta de uma tripla ordenada (a, b, c), em que *a* representa o atleta que chegou em 1º lugar, *b* o que chegou em segundo, e *c* o que chegou em terceiro.

a, *b* e *c* pertencem ao conjunto dos atletas e $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$.

Logo, o número de resultados possíveis é:

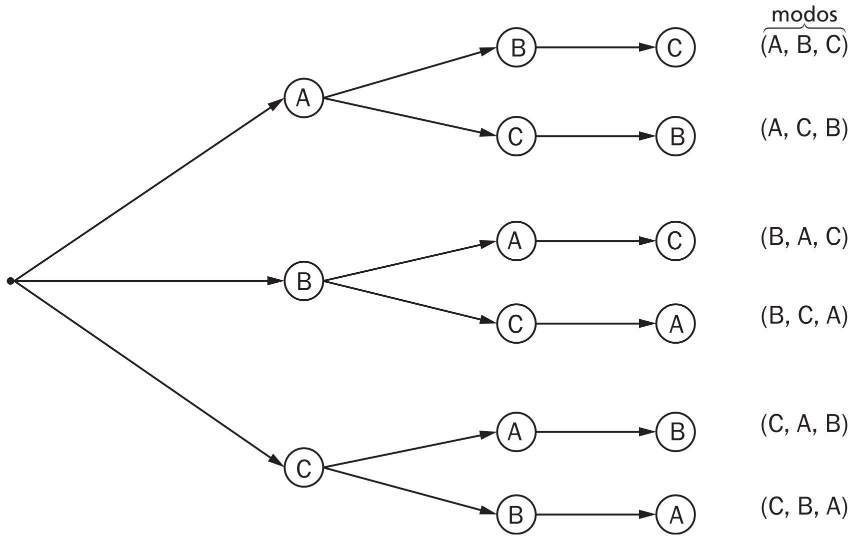
$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

2º) De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?

Cada modo corresponde a uma tripla ordenada de pessoas. Logo, o resultado procurado é:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Se chamarmos de A, B e C as pessoas, os modos podem ser obtidos através do diagrama de árvore.



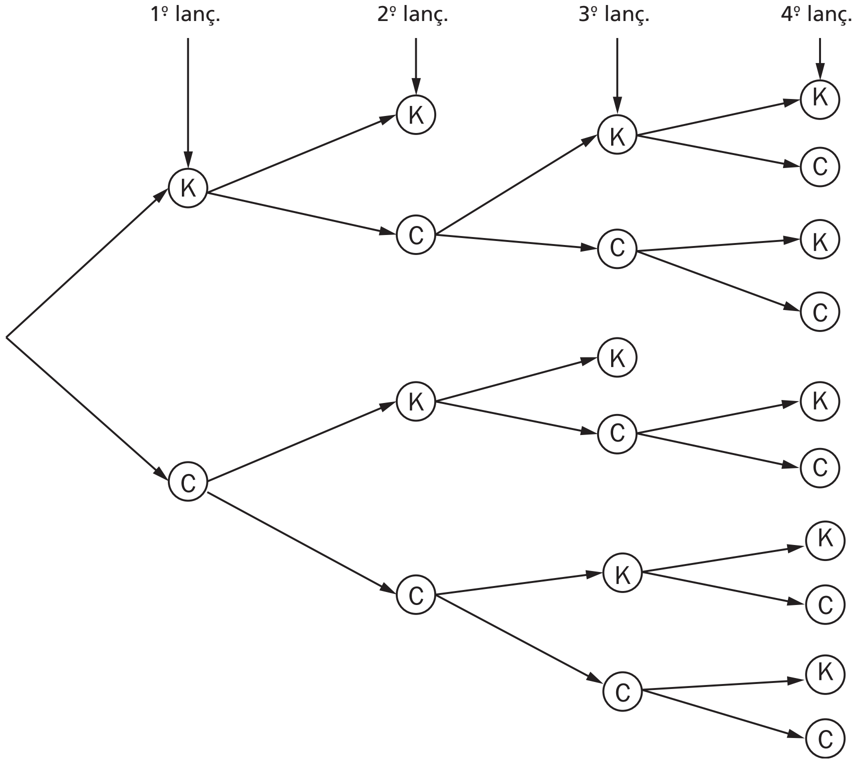
12. Observação:

Algumas vezes, o conjunto cujos elementos queremos contar consta de sequências de tamanhos diferentes (isto é, o número de elementos das sequências consideradas é diferente), o que impede o uso do princípio fundamental da contagem. Entretanto, usando o diagrama de árvore, podemos saber facilmente quantas são as sequências.

13. Exemplo:

Uma pessoa lança uma moeda sucessivamente até que ocorram duas caras consecutivas, ou quatro lançamentos sejam feitos, o que primeiro ocorrer. Quais as sequências de resultados possíveis?

Temos:



Os resultados possíveis são:

(K, K); (K, C, K, K); (K, C, K, C); (K, C, C, K); (K, C, C, C); (C, K, K); (C, K, C, K); (C, K, C, C); (C, C, K, K); (C, C, K, C); (C, C, C, K); (C, C, C, C); e o número de sequências é 12.

EXERCÍCIOS

1. Um homem vai a um restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece oito pratos distintos de carne e cinco pratos diferentes de sobremesa. De quantas formas pode o homem fazer sua refeição?

2. Uma moça possui 5 blusas e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa e uma saia?

3. Num banco de automóvel o assento pode ocupar 6 posições diferentes e o encosto 5 posições, independentemente da posição do assento. Combinando assento e encosto, quantas posições diferentes esse banco pode assumir?

4. Numa festa existem 80 homens e 90 mulheres. Quantos casais diferentes podem ser formados?

5. Um edifício tem 8 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

6. Num concurso com 12 participantes, se nenhum puder ganhar mais que um prêmio, de quantas maneiras poderão ser distribuídos um primeiro e um segundo prêmios?

7. Um homem possui 10 ternos, 12 camisas e 5 pares de sapatos. De quantas formas poderá ele vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos?

8. Um automóvel é oferecido pelo fabricante em 7 cores diferentes, podendo o comprador optar entre os motores 2000 cc e 4000 cc. Sabendo-se que os automóveis são fabricados nas versões “standard”, “luxo” e “superluxo”, quantas são as alternativas do comprador?

9. De quantas formas podemos responder a 12 perguntas de um questionário, cujas respostas para cada pergunta são: sim ou não?

Solução

Cada resposta do questionário todo consta de uma sequência

$$(a_1, a_2, ..., a_{12})$$

em que cada a_1 vale S (sim) ou N (não). Além disso:

$$a_1 \in A_1 = \{S, N\}$$
$$a_2 \in A_2 = \{S, N\}$$
$$\vdots$$
$$a_{12} \in A_{12} = \{S, N\}$$

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o número de sequências do tipo acima é:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{12 \text{ vezes}} = 2^{12}$$

10. Uma prova consta de 20 testes do tipo verdadeiro ou falso. De quantas formas uma pessoa poderá responder aos 20 testes?

11. Uma loteria (semelhante à loteria esportiva) apresenta 10 jogos, cada um com 4 possíveis resultados. Usando a aproximação $2^{10} \cong 10^3$, qual é o número total de resultados possíveis?

12. Em um computador digital, um bit é um dos algarismos 0 ou 1 e uma palavra é uma sucessão de bits. Qual é o número de palavras distintas de 32 bits?

13. Uma sala tem 10 portas. De quantas maneiras diferentes essa sala pode ser aberta?

14. De quantas maneiras diferentes um professor poderá escolher um ou mais estudantes de um grupo de 6 estudantes?

15. De um grupo de 5 pessoas, de quantas maneiras distintas posso convidar uma ou mais para jantar?

16. Quantos anagramas podemos formar, digitando ao acaso em 6 teclas (escolhidas entre as 26 existentes) num teclado? Entre eles consta o anagrama TECTEC?

17. Num concurso para preenchimento de uma cátedra, apresentam-se 3 candidatos. A comissão julgadora é constituída de 5 membros, devendo cada examinador escolher exatamente um candidato. De quantos modos os votos desses examinadores podem ser dados?

18. Quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 7, 8?

19. Temos um conjunto de 10 nomes e outro de 20 sobrenomes. Quantas pessoas podem receber um nome e um sobrenome, com esses elementos?

20. Um mágico se apresenta em público vestindo calça e paletó de cores diferentes. Para que ele possa se apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes, qual é o número mínimo de peças (número de paletós mais número de calças) de que ele precisa?

21. Seis dados são lançados simultaneamente. Quantas sequências de resultados são possíveis, se considerarmos cada elemento da sequência como o número obtido em cada dado?

22. O sistema telefônico de São Paulo utiliza oito (8) dígitos para designar os diversos telefones. Supondo que o primeiro dígito seja sempre dois (2) e que o dígito zero (0) não seja utilizado para designar estações (2º e 3º dígitos), quantos números de telefones diferentes poderemos ter?

23. As letras em código morse são formadas por sequências de traços (–) e pontos (·), sendo permitidas repetições. Por exemplo: (–; ·; –; –; ·; ·).
Quantas letras podem ser representadas:

a) usando exatamente 3 símbolos? b) usando no máximo 8 símbolos?

24. Quantos números telefônicos com 7 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?

Solução

Cada número telefônico consiste em uma sequência de 7 dígitos do tipo:

$(a_1, a_2, ..., a_6, a_7)$ em que $a_1 \in A_1 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$

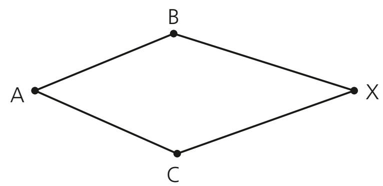
$a_2 \in A_2 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$

$a_7 \in A_7 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o número de sequências é:

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot ... \cdot 10}_{7 \text{ vezes}} = 10^7 = 10\,000\,000$$

25. Existem apenas dois modos de atingir uma cidade X partindo de uma outra A. Um deles é ir até uma cidade intermediária B e de lá atingir X; o outro é ir até C e de lá chegar a X. (Veja esquema.) Existem 10 estradas ligando A e B; 12 ligando B a X; 5 ligando A a C; 8 ligando C a X; nenhuma ligação direta entre B e C e nenhuma ligação direta entre A e X. Qual o número de percursos diferentes que podem ser feitos para, partindo de A, atingir X pela primeira vez?

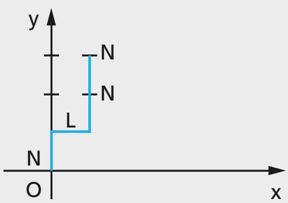


26. Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal de eixos Ox e Oy. Ele pode dar um passo de cada vez, para norte (N) ou para leste (L). Quantas trajetórias ele pode percorrer, se der exatamente 4 passos?

Solução

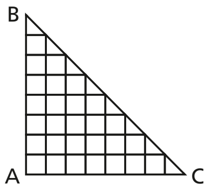
Notemos que cada trajetória consiste em uma quádrupla ordenada (a_1, a_2, a_3, a_4) em que $a_1 \in \{N, L\}$, $a_2 \in \{N, L\}$, $a_3 \in \{N, L\}$ e $a_4 \in \{N, L\}$.

Por exemplo, (N, L, N, N) corresponde graficamente a:



Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o número de trajetórias (quádruplas ordenadas) é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

27. Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras um homem pode ir do ponto A até a reta BC?



28. Resolva o problema anterior, se o homem der exatamente 6 passos, o ponto B tenha coordenadas (0, 6) e C tenha coordenadas (6, 0). Dê o gráfico de 3 trajetórias possíveis.

29. Quantos divisores positivos tem o número $3888 = 2^4 \cdot 3^5$?

Solução

Cada divisor é um número do tipo $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}$, em que $\alpha_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $\alpha_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

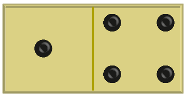
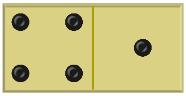
Exemplo: $2^3 \cdot 3^5$; $2^0 \cdot 3^3$; $2^2 \cdot 3^0$, etc.

Portanto, o número de divisores é o número de pares ordenados (α_1, α_2), que, pelo princípio fundamental da contagem, é:

$5 \cdot 6 = 30$.

30. Quantos divisores positivos tem o número $N = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$?

31. Cada pedra de dominó é constituída de 2 números. As peças são simétricas, de sorte que o par de números não é ordenado. Exemplo:

 é o mesmo que 

Quantas peças diferentes podem ser formadas, se usarmos os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

32. Quantas peças diferentes podem ser formadas num jogo de dominó se usarmos os números 0, 1, 2, 3, ..., n?

33. A e B são conjuntos tais que $\#A = n$ e $\#B = r$. Quantas funções $f: A \to B$ existem?

34. Em um baralho de 52 cartas, cinco cartas são escolhidas sucessivamente. Quantas são as sequências de resultados possíveis:

a) se a escolha for feita com reposição?

b) se a escolha for feita sem reposição?

Solução

a) Seja A o conjunto das cartas do baralho. Temos $\#A = 52$.

Cada escolha consta de uma sequência do tipo

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

em que $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_3 \in A$, $a_4 \in A$, $a_5 \in A$ (pois a escolha foi feita com reposição). Logo, pelo princípio fundamental da contagem (parte A), o número de sequências é:

$$\underbrace{52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52}_{\text{5 vezes}} = 52^5 = 380\,204\,032$$

b) Se a escolha é feita sem reposição, então cada sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ é tal que cada elemento pertence a A e são todos elementos distintos.

Logo, pelo princípio fundamental da contagem (parte B), o número de sequências é:

$$\underbrace{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}_{\text{5 fatores}} = 311\,875\,200$$

35. Duas pessoas, Antônio e Benedito, praticam um jogo no qual em cada partida há um único vencedor. O jogo é praticado até que um deles ganhe 2 partidas consecutivas ou 4 partidas tenham sido jogadas, o que ocorrer primeiro. Quais as sequências possíveis de ganhadores?

(Sugestão: Construa o diagrama de árvore.)

36. Uma urna tem 10 bolinhas numeradas 1, 2, 3, ..., 10. Três bolinhas são extraídas sucessivamente, sem reposição. De quantas formas os números das bolinhas formam uma P.A. na ordem em que foram extraídas?

(Sugestão: Construa o diagrama de árvore.)

37. Uma moto tem combustível suficiente para somente três voltas num circuito. Pedro, Manoel e Antônio disputam, por meio do lançamento de uma moeda, a oportunidade de dar cada volta, do seguinte modo:

I. o lançamento da moeda é efetuado antes de cada volta;

II. se coroa, a vez é de Manoel;

III. se cara, a vez é de Pedro;

IV. se a mesma face ocorrer consecutivamente, a vez é de Antônio.

Se a primeira volta for dada por Pedro, quantas voltas poderá dar Antônio?

38. Suponha que no início de um jogo você tenha R$ 2 000,00 e que só possa jogar enquanto tiver dinheiro. Supondo que em cada jogada você perde ou ganha R$ 1 000,00, quais são os possíveis resultados ao final de três jogadas?

39. Um homem tem oportunidade de jogar no máximo 5 vezes na roleta. Em cada jogada, ele ganha ou perde R$ 1 000,00. Começará com R$ 1 000,00 e parará de jogar antes de cinco vezes, se perder todo seu dinheiro ou se ganhar R$ 3 000, 00, isto é, se tiver R$ 4 000,00. De quantas maneiras o jogo poderá se desenrolar?

40. Em um baile há *r* rapazes e *m* moças. Um rapaz dança com 5 moças, um segundo rapaz dança com 6 moças, e assim sucessivamente. O último rapaz dança com todas as moças. Qual é a relação entre *m* e *r*?

III. Consequências do princípio fundamental da contagem

O princípio fundamental da contagem nos fornece o instrumento básico para a Análise Combinatória; entretanto, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa. Iremos então definir os vários modos de formar agrupamentos e, usando símbolos simplificativos, deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado.

IV. Arranjos com repetição

14. Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos *arranjo com repetição* dos m elementos, tomados r a r, toda r-upla ordenada (sequência de tamanho r) formada com elementos de M não necessariamente distintos.

15. Exemplo:

Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma branca (B) e uma azul (A). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida outra bola é extraída e observada sua cor. Quantas são as possíveis sequências de cores observadas?

Temos:

Cada sequência é um par ordenado de cores (x, y) em que $x, y \in M = \{V, B, A\}$. Logo, pelo princípio fundamental da contagem (parte A), o número de pares é:

$3 \cdot 3 = 9$

16. Fórmula do número de arranjos com repetição

Seja $M = \{a_i, a_2, ..., a_m\}$ e indiquemos por $(AR)_{m,\,r}$ o número de arranjos com repetição de *m* elementos tomados *r* a *r*.

Cada arranjo com repetição é uma sequência de *r* elementos, em que cada elemento pertence a M.

$$\underbrace{(-, -, -, ..., -)}_{r \text{ elementos}}$$

Pelo princípio fundamental da contagem (parte A), o número de arranjos $(AR)_{m,\,r}$ será:

$$\boxed{(AR)_{m,\,r} = \underbrace{m \cdot m \cdot ... \cdot m}_{r \text{ vezes}} = m^r}$$

Observemos que, se $r = 1$, $(AR)_{m,\,1} = m$ e a fórmula acima continua válida $\forall r \in \mathbb{N}^*$.

V. Arranjos

17. Seja M um conjunto com *m* elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de arranjo dos *m* elementos tomados *r* a *r* $(1 \leqslant r \leqslant m)$ a qualquer *r*-upla (sequência de *r* elementos) formada com elementos de M, **todos distintos**.

18. Exemplo:

$M = \{a, b, c, d\}$

Os arranjos dos quatro elementos de M, tomados dois a dois, são os pares ordenados (x, y) formados com elementos distintos de M.

Pelo princípio fundamental da contagem (parte B), o número de pares ordenados é:

$$4 \cdot 3 = 12$$

19. Fórmula do número de arranjos

Seja $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e indiquemos por $A_{m,\,r}$ o número de arranjos dos *m* elementos tomados *r* a *r*.

Cada arranjo é uma sequência de *r* elementos, em que cada elemento pertence a M, e são todos distintos.

$$\underbrace{(-, -, ..., -)}_{r \text{ elementos}}$$

Pelo princípio fundamental da contagem (parte B), o número de arranjos $A_{m,\,r}$ será:

$$\boxed{A_{m,\,r} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}}$$

Em particular, se $r = 1$, é fácil perceber que $A_{m,\,1} = m$.

Notemos ainda que, de acordo com a definição que demos de arranjo, temos necessariamente $1 \leqslant r \leqslant m$.

20. Exemplo:

De um baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas é possível obter?

Notemos que cada resultado é uma tripla ordenada de cartas (x, y, z), em que *x* é a 1ª carta extraída, *y* a 2ª e *z* a 3ª. Observemos que *x*, *y*, *z* são todas distintas, visto que a **extração é feita sem reposição.**

Logo, o número que queremos é $A_{52,3}$, isto é:

$$A_{52,\,3} = \underbrace{52 \cdot 51 \cdot 50}_{3 \text{ fatores}} = 132\,600$$

VI. Permutações

21. Seja M um conjunto com *m* elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de permutação dos *m* elementos a todo arranjo em que $r = m$.

22. Exemplo:

Seja $M = \{a, b, c\}$.

As permutações dos elementos de M são todos os arranjos constituídos de 3 elementos.

São eles:

(a, b, c) (b, a, c) (c, a, b) (a, c, b) (b, c, a) (c, b, a)

23. Fórmula do número de permutações

Seja M o conjunto $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e indiquemos por P_m o número de permutações dos *m* elementos de M.

Temos:

$P_m = A_{m,m}$

logo: $P_m = m(m - 1) \cdot (m - 2) \cdot ... \cdot [m - (m - 1)]$

$$\boxed{P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Em particular, se $m = 1$, é fácil perceber que $P_1 = 1$.

24. Exemplo:

De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?

Notemos que cada forma de ficar em fila indiana é uma permutação das 5 pessoas. O número de permutações (modos de ficar em fila indiana) será:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

VII. Fatorial

25. A fim de simplificar as fórmulas do número de arranjos e do número de permutações, bem como outras que iremos estudar, vamos definir o símbolo fatorial.

Seja *m* um número inteiro não negativo ($m \in \mathbb{N}$). Definimos **fatorial de m** (e indicamos por m!) por meio da relação:

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ para } m \geqslant 2$$
$$1! = 1$$
$$0! = 1$$

As definições 1! e 0! serão justificadas posteriormente.

26. Exemplo:

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

27. O cálculo de m!, diretamente, torna-se trabalhoso à medida que aumenta. ($10! = 3\,628\,800$)

Entretanto, muitos cálculos podem ser simplificados se notarmos que:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n!} = (n+1) \cdot n!$$

28. Exemplos:

1º) Calcular $\dfrac{10!}{9!}$

Temos: $\dfrac{10!}{9!} = \dfrac{10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 10$

2º) Calcular $\dfrac{10!}{8!}$

Temos: $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$

3º) Calcular $\frac{12!}{9!\,3!}$

Temos: $\frac{12!}{9!\,3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}\,3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$

29. As fórmulas do número de arranjos e do número de permutações também podem ser simplificadas com a notação fatorial.

De fato:

$P_m = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$

$A_{m,r} = m \cdot (m-1) (m-r+1) =$

$= m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-r+1) \cdot \frac{(m-r) \cdot (m-r-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m-r) \cdot (m-r-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

$$\boxed{A_{m,\,r} = \frac{m!}{(m-r)!}}$$

Em particular $\begin{cases} P_1 = 1 \\ 1! = 1 \end{cases}$

e a fórmula $P_m = m!$ é válida $\forall m \in \mathbb{N}^*$

e ainda:

em particular $\begin{cases} A_{m,\,1} = m \ \forall m \in \mathbb{N}^* \\ \frac{m!}{(m-1)!} = m \ \forall m \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$

e a fórmula $A_{m,\,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$ é válida $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall r \in \mathbb{N}^*$ com $r \leqslant m$.

EXERCÍCIOS

41. Usando o diagrama de árvore, obtenha todos os arranjos dos elementos de $M = \{a, b, c, d\}$ tomados dois a dois.

42. Calcule:

a) $A_{6,3}$ b) $A_{10,4}$ c) $A_{20,1}$ d) $A_{12,2}$

43. Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

44. Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica a outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?

45. Em um torneio (de dois turnos) do qual participam seis times, quantos jogos são disputados?

46. Dispomos de 8 cores e queremos pintar uma bandeira de 5 listras, cada listra com uma cor. De quantas formas isso pode ser feito?

Solução

Cada maneira de pintar a bandeira consiste de uma sequência de cinco cores distintas (sequência, porque as listras da bandeira estão numa ordem) escolhidas entre as oito existentes. Logo, o número de sequências procurado é:

$$A_{8,5} = \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}_{n \text{ fatores}} = 6720$$

47. Uma bandeira é formada de 7 listras, que devem ser pintadas de 3 cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?

48. Uma linha ferroviária tem 16 estações. Quantos tipos de bilhetes devem ser impressos, se cada tipo deve assinalar a estação de partida e de chegada, respectivamente?

49. Designando-se seis cidades por A, B, C, D, E e F, determine o número de maneiras que permitem a ida de A até F, passando por todas as demais cidades.

50. As 5 finalistas do concurso para Miss Universo são: Miss Japão, Miss Brasil, Miss Finlândia, Miss Argentina e Miss Noruega. De quantas formas os juízes poderão escolher o primeiro, o segundo e o terceiro lugares nesse concurso?

51. Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, ..., 9. O segredo do cofre é formado por uma sequência de 3 dígitos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir abri-lo? (Suponha que a pessoa sabe que o segredo é formado por dígitos distintos.)

52. De quantas maneiras um técnico de futebol pode formar um quadro de 11 jogadores, escolhidos entre 22, dos quais 3 são goleiros e só o goleiro tem posição fixa?

53. No jogo de loto, de uma urna contendo 90 pedras numeradas de 1 a 90, quatro pedras são retiradas **sucessivamente**; qual é o número de extrações possíveis, tal que a terceira pedra seja 80?

54. Existem 10 cadeiras numeradas de 1 a 10. De quantas formas duas pessoas podem se sentar, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas?

Solução

Inicialmente notemos que cada maneira de elas se sentarem corresponde a um par ordenado de números distintos escolhidos entre 1, 2, ..., 10.

Exemplo: $(2, 6)\begin{cases}\text{a pessoa A se senta na cadeira 2}\\ \text{a pessoa B se senta na cadeira 6}\end{cases}$

$(6, 2)\begin{cases}\text{a pessoa A se senta na cadeira 6}\\ \text{a pessoa B se senta na cadeira 2}\end{cases}$

$(3, 4)\begin{cases}\text{a pessoa A se senta na cadeira 3}\\ \text{a pessoa B se senta na cadeira 4}\end{cases}$

Inicialmente, calculemos o total de pares ordenados, que é igual a $A_{10,\,2} = 10 \cdot 9 = 90$.

Agora temos que excluir os pares ordenados cujos elementos sejam números consecutivos. São eles:

(1, 2) (2, 3) (3, 4) ... (9, 10) : 9 pares

(2, 1) (3, 2) (4, 3) ... (10, 9) : 9 pares

Ao todo, devemos excluir $9 + 9 = 18$ pares.

Logo, o número de maneiras de as pessoas se sentarem, havendo ao menos uma cadeira entre elas, é $90 - 18 = 72$.

É bastante importante o leitor notar a razão pela qual cada maneira é um par ordenado.

$$\Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{senta-se}\\ \text{A}}}{\underline{\qquad}}\,,\quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{senta-se}\\ \text{B}}}{\underline{\qquad}}\Big)$$

55. Uma urna contém *m* bolas numeradas de 1 até m; $r(r \leqslant m)$ bolas são extraídas sucessivamente. Qual o número de sequências de resultados possíveis se a extração for:

a) com reposição de cada bola após a extração?

b) sem reposição de cada bola após a extração?

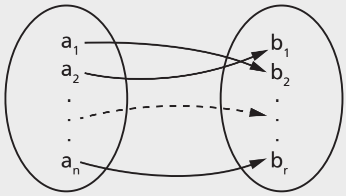
56. Uma urna I contém 5 bolas numeradas de 1 a 5. Outra urna II contém 3 bolas numeradas de 1 a 3. Qual o número de sequências numéricas que podemos obter se extrairmos, sem reposição, 3 bolas da urna I e, em seguida, 2 bolas da urna II.

57. Existem duas urnas. A 1ª com 4 bolas numeradas de 1 a 4 e a 2ª com 3 bolas numeradas de 7 a 9. Duas bolas são extraídas da 1ª urna, sucessivamente e sem reposição, e em seguida 2 bolas são extraídas da 2ª urna, sucessivamente e sem reposição. Quantos números (de 4 algarismos) é possível formar nessas condições?

58. Se A e B são conjuntos e $\#A = n$ e $\#B = r$, quantas funções $f: A \to B$, injetoras, existem? $(1 \leqslant n \leqslant r)$

Solução

Sejam $\begin{cases} A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \\ B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\} \end{cases}$



Notemos que, se *f* é injetora, então $f(a_i) \neq f(a_j)$ para todo $a_i \neq a_j$.

Por outro lado, cada função vai ser definida por uma ênupla de imagens, em que todos os elementos da ênupla devem ser distintos, pois a função é injetora.

Por exemplo, uma das funções é definida pela ênupla de imagens.

$$\begin{array}{ccccc} (b_1, & b_2, \ldots, & b_k, & b_{k+1}, \ldots, & b_n) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_k) & f(a_{k+1}) & f(a_n) \end{array}$$

Outra função é definida pela ênupla:

$$\begin{array}{ccccccccc} (b_n, & b_{n-1}, & \ldots, & b_{k+1}, & b_k, & \ldots, & b_2, & b_1) \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ f(a_1) & f(a_2) & & f(a_{n-k}) & f(a_{n-k+1}) & & f(a_{n-1}) & f(a_n) \end{array}$$

Logo, o número de funções é o número de arranjos dos *r* elementos de B, tomados *n* a *n*, isto é, $A_{r,\,n} = \dfrac{r!}{(r-n)!}$.

59. Qual é o número de funções injetoras definidas em $A = \{1, 2, 3\}$ com valores em $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$?

60. Sejam A um conjunto finito com *m* elementos e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Qual é o número de todas as funções definidas em I_n com valores em A?

61. Sejam A e B dois conjuntos tais que $\#A = \#B = n > 0$. Quantas funções $f: A \to B$ bijetoras existem?

62. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

63. Qual é a quantidade de números de 3 algarismos que têm pelo menos 2 algarismos repetidos?

64. Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8, 9?

Solução

Cada número será uma tripla ordenada de algarismos escolhidos entre os dados. Como estamos interessados nos números pares, então nos interessam as triplas do tipo:

$(\_, \_, 6)$ (1)

ou

$(\_, \_, 8)$ (2)

O número de triplas do tipo (1) é $A_{5,\,2} = 20$ e o de triplas do tipo (2) é $A_{5,\,2} = 20$.
Logo, o resultado procurado é $20 + 20 = 40$.

65. Há placas de automóveis que são formadas por duas letras seguidas de 4 algarismos. Quantas placas podem ser formadas com as letras A e B e os algarismos pares, sem repetir nenhum algarismo?

66. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números com algarismos distintos existem entre 500 e 1000?

67. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) existem?

68. Com os algarismos 1, 2, 3, ..., 9, quantos números de quatro algarismos existem, em que pelo menos dois algarismos são iguais?

69. Quantos números formados por 3 algarismos distintos escolhidos entre 2, 4, 6, 8, 9 contêm o 2 e não contêm o 6? (Lembre-se de que o 2 pode ocupar a 1ª, 2ª ou a 3ª posição.)

70. Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, quantos arranjos desses dígitos tomados 4 a 4 têm o dígito 1 antes do 4?

71. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar?

72. Quantos números ímpares de 4 algarismos, sem repetição, podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

73. Com os dígitos 2, 5, 6, 7, quantos números formados por 3 dígitos distintos ou não são divisíveis por 5?

74. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números de 4 algarismos distintos. Dentre eles, quantos são divisíveis por 5?

75. Qual é o total de números múltiplos de 4, com quatro algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

76. Formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtêm permutando os algarismos 1, 2, 4, 6, 8, que lugar ocupa o número 68 412?

Solução

Esse número é precedido pelos números da forma:

(1) (1, —, —, —, —) que são em número de $P_4 = 4!$

(2) (2, —, —, —, —) que são em número de $P_4 = 4!$

(3) (4, —, —, —, —) que são em número de $P_4 = 4!$

(4) (6, 1, —, —, —) que são em número de $P_3 = 3!$

(5) (6, 2, —, —, —) que são em número de $P_3 = 3!$

(6) (6, 4, —, —, —) que são em número de $P_3 = 3!$

(7) (6, 8, 1, —, —) que são em número de $P_2 = 2!$

(8) (6, 8, 2, —, —) que são em número de $P_2 = 2!$

De (1), (2), ..., (8) concluímos que 68 412 é precedido por um total de $4! + 4! + 4! + 3! + 3! + 3! + 2! + 2! = 94$ números. Portanto, a posição de 68 412 é a 95ª.

77. Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 e sem repetição, pode-se escrever *x* números maiores que 2500. Qual é o valor de *x*?

78. Com os algarismos 0, 1, 2, 5 e 6, sem os repetir, quantos números compreendidos entre 100 e 1000 poderemos formar?

79. Formados e dispostos em ordem crescente os números que se obtêm permutando os algarismos 2, 3, 4, 8 e 9, que lugar ocupa o número 43892?

80. De quantas formas podemos preencher um cartão da loteria esportiva, com um único prognóstico duplo e todos os outros, simples?

81. Uma peça para ser fabricada deve passar por 7 máquinas, sendo que a operação de cada máquina independe das outras. De quantas formas as máquinas podem ser dispostas para montar a peça?

82. Consideremos *m* elementos distintos. Destaquemos *k* dentre eles. Quantos arranjos simples daqueles *m* elementos, tomados *n* a *n* ($A_{m,\ n}$), podemos formar, de modo que em cada arranjo haja sempre, contíguos e em qualquer ordem de colocação, r ($r < n$) dos *k* elementos destacados?

83. Com relação à palavra TEORIA:

a) Quantos anagramas existem?

b) Quantos anagramas começam por T?

c) Quantos anagramas começam por T e terminam com A?

d) Quantos anagramas começam por vogal?

e) Quantos anagramas têm as vogais juntas?

Solução

a) Cada anagrama é uma permutação das letras T, E, O, R, I, A. Logo, o número procurado é:

$P_6 = 6! = 720$

b) T _ _ _ _ _

Neste caso temos somente que permutar as letras E, O, R, I, A. Logo, o número procurado é:

$P_5 = 5! = 120$

c) T _ _ _ _ A

Neste caso temos somente que permutar as letras E, O, R, I. Logo, o número procurado é:

$P_4 = 4! = 24$

d) Temos as seguintes possibilidades:

A _ _ _ _ _ 5! = 120 anagramas

E _ _ _ _ _ 5! = 120 anagramas

I _ _ _ _ _ 5! = 120 anagramas

O _ _ _ _ _ 5! = 120 anagramas

Logo, ao todo teremos: 120 + 120 + 120 + 120 = 480 anagramas.

e) Se as vogais A, E, I, O devem estar juntas, então elas funcionam como "uma letra" que deve ser permutada com T e R. Logo, o número de permutações é:

$P_3 = 3! = 6$

Todavia, em cada uma dessas permutações, as vogais podem se permutar entre si, de 4! = 24 formas.

Logo, o número de anagramas nessas condições é:

$6 \cdot 24 = 144$

84. Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes?

85. Calcule o número total de inteiros positivos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4, se nenhum algarismo é repetido em nenhum inteiro.

86. Uma palavra é formada por N vogais e N consoantes. De quantos modos distintos podem ser permutadas as letras dessa palavra, de modo que não apareçam juntas duas vogais ou duas consoantes?

87. Quantas palavras distintas podemos formar com a palavra PERNAMBUCO? Quantas começam com a sílaba PER?

88. Quantos anagramas da palavra PASTEL começam e terminam por consoante?

89. Calcule o número de anagramas da palavra REPÚBLICA, nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.

90. De quantas formas podemos colocar 8 torres num tabuleiro de xadrez de modo que nenhuma torre possa “comer” outra?

91. Em um “horário especial”, um diretor de televisão dispõe de 7 intervalos para anúncios comerciais. Se existirem 7 diferentes tipos de anúncios, de quantas formas o diretor poderá colocar os 7 nos intervalos destinados a eles?

92. Dez pessoas, entre elas Antônio e Beatriz, devem ficar em fila. De quantas formas isso pode ser feito se Antônio e Beatriz devem ficar sempre juntos?

Solução

Se Antônio e Beatriz devem ficar juntos, eles funcionam como "uma única pessoa", que junto com as outras 8 devem ser permutadas, dando um total de 9! permutações.

Entretanto, em cada uma dessas permutações, Antônio e Beatriz podem ser permutados **entre si** (AB ou BA) de $2! = 2$ formas.

Logo, o total de permutações em que eles aparecem juntos (AB ou BA) é: $2 \cdot 9!$

93. De quantas formas 4 homens e 5 mulheres podem ficar em fila, se:

a) os homens devem ficar juntos;

b) os homens devem ficar juntos e as mulheres também?

94. Temos 5 meninos e 5 meninas. De quantas formas eles podem ficar em fila se meninos e meninas ficam em posições alternadas?

95. Considere um teste de múltipla escolha, com 5 alternativas distintas, sendo uma única correta. De quantos modos distintos podemos ordenar as alternativas, de maneira que a única correta não seja nem a primeira nem a última?

96. De quantas maneiras três casais podem ocupar 6 cadeiras, dispostas em fila, de tal forma que as duas das extremidades sejam ocupadas por homens?

97. De quantas formas 6 pessoas podem se sentar numa fileira de 6 cadeiras se duas delas (Geraldo e Francisco) se recusam a sentar um ao lado do outro?

98. As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas com as letras A, B e C junto com os algarismos pares, sem haver repetição de letras ou de algarismos?

99. No sistema decimal, quantos números de cinco algarismos (sem repetição) podemos escrever, de modo que os algarismos 0 (zero), 2 (dois) e 4 (quatro) apareçam agrupados?

Obervação: Considere somente números de 5 algarismos em que o primeiro algarismo é diferente de zero.

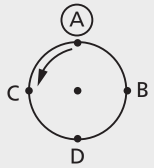
100. De quantas formas 4 pessoas podem se sentar ao redor de uma mesa circular?

Solução

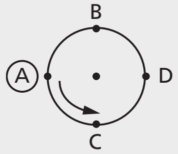
Quando elementos são dispostos ao redor de um círculo; a cada disposição possível chamamos **permutação circular**. Além disso, duas permutações circulares são consideradas idênticas se, e somente se, quando percorremos a circunferência no sentido anti-horário a partir de um mesmo elemento das duas permutações, encontramos elementos que formam sequências iguais.

Por exemplo, consideremos as permutações circulares:

1) Tomando o elemento A, a sequência encontrada é (A,C, D, B).



2) Tomando o elemento A, a sequência encontrada é (A, C, D, B).



Logo, as duas permutações circulares são iguais. A igualdade das duas permutações circulares acima poderia ser observada, tomando-se outro elemento diferente de A. Por exemplo, D. Em (1) encontraremos a sequência (D, B, A, C) e em (2) encontraremos a sequência (D, B, A, C). Para resolvermos o exercício proposto, chamemos de x o número de permutações circulares. Notemos que a cada permutação circular de A, B, C, D correspondem 4 permutações de A, B, C, D.

Por exemplo: as permutações circulares do exemplo correspondem às permutações:

(A, C, D, B) (D, B, A, C)

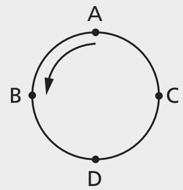
(C, D, B, A) (B, A, C, D)

Por outro lado, no conjunto das permutações, a cada quatro permutações corresponde uma única permutação circular. Por exemplo:

(A, B, D, C) (D, C, A, B)

(B, D, C, A) (C, A, B, D)

correspondem a permutação circular:



A cada conjunto de 4 permutações que definem uma determinada permutação circular chamamos de **classe**.

Como temos *x* permutações circulares, teremos *x* classes.

Observemos que a interseção de duas classes distintas é o conjunto vazio.

Logo, o número de permutações de A, B, C, D pode ser calculado de dois modos:

1º) $P_4 = 4!$

2º) existem *x* classes, cada qual com 4 permutações; logo, o total de permutações é $4 \cdot x$.

Portanto:

$$4 \cdot x = 4! \Rightarrow x = \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

Observação:

Com raciocínio análogo ao anterior, podemos calcular o número de permutações circulares de $n(n \geqslant 2)$ elementos, da seguinte forma:

1) existem $n!$ permutações dos *n* elementos;

2) existem *x* permutações circulares em que a cada uma correspondem *n* permutações.

Logo: $n \cdot x = n! \Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{n!}{n} = (n-1)!}$

que é o número de permutações circulares de *n* elementos.

101. De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

102. Quantos colares podemos formar usando quatro contas, todas diferentes?

103. Temos *m* meninos e *m* meninas. De quantas formas eles podem formar uma roda, de modo que os meninos e as meninas se alternem?
Sugestão: Suponha $m = 3$ e forme primeiro a roda só com meninos. Depois que o leitor "sentir" o problema para $m = 3$, deve resolver para *m* qualquer.

104. Mostre que:

a) $5! + 7! \neq 12!$

b) $8! - 3! \neq 5!$

c) $2 \cdot (5!) \neq (2 \cdot 5)!$

105. Resolva a equação: $A_{n,4} = 12 \cdot A_{n,2}$.

Solução

Observemos que a equação só tem solução para $n \geqslant 4$.

Temos:

$n(n-1)(n-2)(n-3) = 12 \cdot n \cdot (n-1)$.

Como $n(n-1) \neq 0$, resulta:

$(n-2)(n-3) = 12$

$n^2 - 5n + 6 = 12$

$$n^2 - 5n - 6 = 0 \begin{cases} 6 \\ -1 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

o conjunto solução é $\{6\}$.

106. Obtenha *m*, sabendo que: $\dfrac{A_{m,3}}{A_{m,2}} = 4$.

107. Se $\dfrac{A_{n-1,3}}{A_{n,3}} = \dfrac{3}{4}$, calcule *n*.

108. Resolva a equação: $A_{m,3} = 30\,m$.

109. Obtenha *m* na equação $(m+2)! = 72 \cdot m!$

110. Resolva a equação $(n-6)! = 720$.

111. Calcule *n*, sabendo que $2A_{n,2} + 50 = A_{2n,2}$.

112. Prove que, $\forall n \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant 2$, $n! - (n-2)! = (n^2 - n - 1)(n-2)!$

113. Prove que:

a) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$

b) $(m!)^2 = [(m+1)! - m!] \cdot (m-1)!$

114. Exprima mediante fatoriais $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n)$.

Solução

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n) =$

$= \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2)}_{n \text{ fatores}} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) = 2^n \cdot n!$

115. Exprima mediante fatoriais:

a) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$

b) $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot n^2$

116. Simplifique a expressão $\dfrac{(k!)^3}{\{(k-1)!\}^2}$.

117. Simplifique a expressão $\dfrac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$

118. Simplifique a expressão $[(m+2)! - (m+1)!]m!$

119. Simplifique a expressão $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + m \cdot m!$, sabendo que:

$m \cdot m! = (m+1)! - m!$

120. Simplifique a expressão $n^2 \cdot (n-2)! \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$, para $n \geqslant 2$.

121. Prove que:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Sugestão: Desenvolva a somatória e use a identidade:

$$\frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!} = \frac{i}{(i+1)!}$$

122. Mostre que:

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)!}$$

123. Mostre que $\dfrac{(n+2)! + (n+1) \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot (n-1)!}$ é um quadrado perfeito.

VIII. Combinações

30. Seja M um conjunto com *m* elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de combinações dos *m* elementos, tomados *r* a *r*, aos subconjuntos de M constituídos de *r* elementos.

31. Exemplo:

M = {a, b, c, d}

As combinações dos 4 elementos, tomados dois a dois, são os subconjuntos:

{a, b} {b, c} {c, d}

{a, c} {b, d}

{a, d}

32. Notemos que {a, b} = {b, a} pois, conforme definimos, combinação é um conjunto, portanto **não depende da ordem dos elementos**.

É importante notar a diferença entre uma combinação (conjunto) e uma sequência, pois numa combinação **não importa a ordem dos elementos**, ao passo que numa sequência **importa a ordem dos elementos**.

A própria natureza do problema a ser resolvido nos dirá se os agrupamentos a serem formados dependem ou não da ordem em que figuram os elementos.

33. Cálculo do número de combinações

Seja $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e indiquemos por $C_{m,\,r}$ ou $\binom{m}{r}$ o número de combinações dos *m* elementos tomados *r* a *r*.

Tomemos uma combinação, digamos esta: $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_r\}$. Se permutarmos os elementos de E_1, obteremos r! arranjos.

Se tomarmos outra combinação, digamos: $E_2 = \{a_2, a_3, ..., a_r, a_{r+1}\}$, permutando os elementos de E_2, obteremos outros r! arranjos.

Chamemos de x o número de combinações, isto é, $x = C_{m,\,r}$ e suponhamos formadas todas as combinações dos *m* elementos tomados *r* a *r*. São elas:

$E_1, E_2, E_3, ..., E_x$

Cada combinação E_i dá origem a r! arranjos. Chamemos de F_i o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de E_i.

Temos então a seguinte correspondência:

$E_1 \to F_1$

$E_2 \to F_2$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$E_x \to F_x$

Verifiquemos que:

(1) $F_i \cap F_j = \varnothing$ para $i \neq j$

(2) $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x = F$, em que F é o número de arranjos dos *m* elementos de M tomados *r* a *r*.

Temos:

(1) Se $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ (para $i \neq j$), então existiria um arranjo que pertenceria a F_i e F_j simultaneamente.

Tomando os elementos desse arranjo obteríamos que coincidiria com E_i e E_j e, portanto, $E_i = E_j$. Isto é absurdo, pois quando construímos todas as combinações: $E_i \neq E_j$ (para $i \neq j$).

Logo, $F_i \cap F_j = \varnothing$.

(2) Para provarmos que $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_x = F$, provemos que:

$$\begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_x \subset F \text{ e} \\ F \subset F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_x \end{cases}$$

a) Seja *a* um arranjo tal que:

$a \in F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup Fx$

Então $a \in F_1$ (para algum $i \in \{1, 2, \dots x\}$) e, evidentemente, $a \in F$; logo:

$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x \subset F$

b) Seja agora *a* um arranjo tal que $a \in F$. Se tomarmos os elementos desse arranjo *a*, obteremos uma das combinações, digamos E_i. Ora, como E_i gera o conjunto dos arranjos F_i, então $a \in F_i$ e, portanto:

$a \in F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_i \cup \dots \cup F_x$

Então:

$F \subset F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_x$

De (a) a (b) resulta que:

$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x = F$

Sabemos ainda que, se x conjuntos são disjuntos dois a dois, o número de elementos da união deles é a soma do número de elementos de cada um.

Isto é,

$\#(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x) = \#F \Rightarrow \#F_1 + \#F_2 + \ldots + \#F_x = \#F$

$r! + r! + \ldots + r! = \dfrac{m!}{(m-r)!} \Rightarrow x \cdot r! = \dfrac{m!}{(m-r)!}$

Logo:

$$\boxed{x = \frac{m!}{(m-r)!\, r!}}$$

Como x indica $C_{m,\, r}$ $\left(\text{ou } \binom{m}{r}\right)$, temos a fórmula do número de combinações:

$$\boxed{C_{m,\, r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}} \quad \forall m, r \in \mathbb{N}^*, r < m$$

34. Casos particulares

1º caso: $m, r \in \mathbb{N}^*$ e $r = m$

$$\begin{cases} C_{m,\, m} = 1 \\ \dfrac{m!}{m!(m-m)!} = 1 \end{cases}$$

2º caso: $m \in \mathbb{N}^*$ e $r = 0$

$$\begin{cases} C_{m,\, 0} = 1 \text{ (o único subconjunto com 0 elemento é o vazio)} \\ \dfrac{m!}{0!\,(m-0)!} = 1 \end{cases}$$

3º caso: $m = 0$ e $r = 0$

$$\begin{cases} C_{0,\, 0} = 1 \text{ (o único subconjunto do conjunto vazio é o próprio vazio)} \\ \dfrac{0!}{0!\,(0-0)!} = 1 \end{cases}$$

Em virtude da análise dos casos particulares, concluímos que a fórmula

$$\boxed{C_{m,\,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}}$$

é válida $\forall m, r \in \mathbb{N}$ com $r \leqslant m$.

35. Exemplos:

1º) Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Notemos que cada comissão é um subconjunto de três elementos (pois em cada comissão não importa a ordem dos elementos). Logo, o número de comissões é:

$$\binom{10}{3} = C_{10,\,3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$$

2º) Temos 7 cadeiras numeradas de 1 a 7 e desejamos escolher 4 lugares entre os existentes. De quantas formas isso pode ser feito?

Cada escolha de 4 lugares corresponde a uma combinação dos 7 elementos, tomados 4 a 4, pois a ordem dos números escolhidos não interessa (escolher os lugares 1, 2, 4, 7 é o mesmo que escolher os lugares 7, 2, 4, 1). Logo, o resultado procurado é:

$$C_{7,\,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

EXERCÍCIOS

124. Calcule os números:

a) $\binom{6}{2}$ b) $\binom{6}{4}$ c) $\binom{8}{0}$

125. Obtenha todas as combinações dos elementos de $M = \{7, 8, 9, 0\}$, tomados dois a dois.

126. Um conjunto A possui *n* elementos, sendo $n \geqslant 4$. Determine o número de subconjuntos de A com 4 elementos.

127. O conjunto A tem 45 subconjuntos de 2 elementos. Qual é o número de elementos de A?

128. Sabendo que $\dfrac{C_{8,\,p+2}}{C_{8,\,p+1}} = 2$, determine o valor de *p*.

129. Calcule *p*, sabendo que $A_{m,\,p} = C_{m,\,p}$ $\forall m$ e $0 \leqslant p < m$.

130. Calcule $A_{m,\,3}$, sabendo que $C_{m,\,3} = 84$.

131. Se $\dbinom{n}{2} = 28$, determine *n*.

132. Determine *x* na equação $A_{x,\,3} - 6 \cdot C_{x,\,2} = 0$.

133. Determine *n*, sabendo que $A_{n+1,\,4} = 20 \cdot C_{n,\,2}$.

134. Qual é o número *m* de objetos de uma coleção que satisfaz a igualdade $A_{m,\,3} - C_{m,\,3} = 25 \cdot C_{m,\,m-1}$.

135. Seja *a*, $a \geqslant 6$, a solução da equação $A_{n+2,\,7} = 10\,080 \cdot C_{n+1,\,7}$. Então, sendo $f(x) = x^2 - 3x + 1$, calcule f(a).

136. Determine *m*, sabendo que $A_{m,\,5} = 180 \cdot C_{m,\,3}$.

137. Determine o valor de *p* na equação $\dfrac{A_{p,\,3}}{C_{p,\,4}} = 12$.

138. Resolva o sistema: $\begin{cases} C_{n,\,p} = 78 \\ A_{n,\,p} = 156 \end{cases}$

139. Prove que o produto de *m* fatores inteiros positivos e consecutivos é divisível por m!

Sugestão: Procure relacionar o produto dado com alguma fórmula conhecida.

140. Uma prova consta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução

Notemos que a ordem em que o aluno escolher as 10 questões não interessa. Por exemplo, resolver as questões 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 é o mesmo que resolver as questões 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Logo, cada maneira de escolher 10 questões é uma combinação das 15 questões, tomadas 10 a 10, isto é:

$$\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!\,5!} = 3003$$

141. De um baralho de 52 cartas, são extraídas 4 cartas sucessivamente e sem reposição. Qual o número de resultados possíveis, se não levarmos em conta a ordem das cartas extraídas?

142. Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras, havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião?

143. Quantos produtos podemos obter se tomarmos 3 fatores distintos escolhidos entre 2, 3, 5, 7 e 11?

144. Um grupo tem 10 pessoas. Quantas comissões de no mínimo 4 pessoas podem ser formadas, com as disponíveis?

145. Um salão tem 10 portas. De quantas maneiras diferentes este salão poderá ser aberto?

146. Dez clubes de futebol disputaram um campeonato em dois turnos. No final, dois clubes empataram na primeira colocação, havendo mais um jogo de desempate. Quantos jogos foram disputados?

147. De quantas formas podemos escolher 4 cartas de um baralho de 52 cartas, sem levar em conta a ordem delas, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei?

Solução

Como não levamos em conta a ordem das cartas, cada escolha é uma combinação. O número total de combinações é $\binom{52}{4}$. O número de combinações em que não comparece o rei é $\binom{48}{4}$. Logo, a diferença $\binom{52}{4} - \binom{48}{4}$ é o número de combinações em que comparece ao menos um rei.

148. O sr. Moreira, dirigindo-se ao trabalho, vai encontrando seus amigos e levando-os juntos no seu carro. Ao todo, leva 5 amigos, dos quais apenas 3 são conhecidos entre si. Feitas as apresentações, os que não se conheciam apertam-se as mãos dois a dois. Qual é o total de apertos de mão?

149. Existem 10 jogadores de futebol de salão, entre eles João, que por sinal é o único que joga como goleiro. Nessas condições, quantos times de 5 pessoas podem ser escalados?

150. Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 10 jogadores (entre eles Ari e Arnaldo). De quantas formas isso pode ser feito, se Ari e Arnaldo devem necessariamente ser escalados?

151. Um professor conta exatamente 3 piadas no seu curso anual. Ele tem por norma nunca contar num ano as mesmas 3 piadas que contou em qualquer outro ano. Qual é o número mínimo de piadas diferentes que ele pode contar em 35 anos?

152. Uma equipe brasileira de automobilismo tem 4 pilotos de diferentes nacionalidades, sendo um único brasileiro. Ela dispõe de 4 carros, de cores distintas, dos quais somente um foi fabricado no Brasil. Sabendo que obrigatoriamente ela deve inscrever, em cada corrida, pelo menos um piloto ou carro brasileiros, qual é o número de inscrições diferentes que ela pode fazer, para uma corrida da qual irá participar com 3 carros?

153. Um químico possui 10 (dez) tipos de substâncias. De quantos modos possíveis poderá associar 6 (seis) dessas substâncias se, entre as dez, duas somente não podem ser juntadas porque produzem mistura explosiva?

154. Um grupo consta de 20 pessoas, das quais 5 matemáticos. De quantas formas podemos formar comissões de 10 pessoas de modo que:
a) nenhum membro seja matemático?
b) todos os matemáticos participem da comissão?
c) haja exatamente um matemático na comissão?
d) pelo menos um membro da comissão seja matemático?

155. De um grupo de 10 pessoas deseja-se formar uma comissão com 5 membros. De quantas formas isso pode ser feito, se duas pessoas (A e B) ou fazem parte da comissão, ou não?

156. Uma organização dispõe de 10 economistas e 6 administradores. Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas de modo que cada comissão tenha no mínimo 3 administradores?

157. Uma empresa tem 3 diretores e 5 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas, contendo no mínimo um diretor?

158. Numa classe de 10 estudantes, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado se dois dos dez são marido e mulher e só irão juntos?

159. Um homem possui 8 pares de meias (todos distintos). De quantas formas ele pode selecionar 2 meias, sem que elas sejam do mesmo par?

160. Temos 10 homens e 10 mulheres. Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar se em cada uma deve haver 3 homens e 2 mulheres?

Solução

Podemos escolher 3 homens entre 10 de $\binom{10}{3} = 120$ formas e podemos escolher 2 mulheres entre 10 de $\binom{10}{2} = 45$ formas.

Cada grupo de 3 homens pode se juntar com um dos 45 grupos de mulheres, formando uma comissão. Como existem 120 grupos de homens, teremos ao todo $120 \cdot 45 = 5\,400$ comissões.

161. Temos 5 homens e 6 mulheres. De quantas formas:

a) podemos formar uma comissão de 3 pessoas?

b) podemos formar uma comissão de 3 pessoas de modo que haja 2 homens e uma mulher na mesma comissão?

162. Um lote contém 50 peças boas e 10 defeituosas. Extraindo-se 8 peças (sem reposição), não levando em conta sua ordem, de quantas formas podemos obter 4 peças boas e 4 defeituosas?

163. Em uma urna existem 12 bolas, das quais 7 são pretas e 5 brancas. De quantos modos podemos tirar 6 bolas da urna, das quais 2 são brancas?

164. Quantos subconjuntos de 5 cartas contendo exatamente 3 ases podem ser formados de um baralho de 52 cartas?

165. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 5 brancas. De quantas formas podemos extrair 2 bolas, sem reposição e sem levar em conta a ordem na extração, de modo que:

a) as duas sejam vermelhas?

b) as duas sejam brancas?

c) uma seja vermelha e a outra branca?

166. Uma urna contém 10 bolas brancas e 6 pretas. De quantos modos é possível tirar 7 bolas, das quais pelo menos 4 sejam pretas?

167. A diretoria de uma firma é constituída por 7 diretores brasileiros e 4 japoneses. Quantas comissões de 3 brasileiros e 3 japoneses podem ser formadas?

168. Deve ser formada uma comissão constituída de 3 estatísticos e 3 economistas, escolhidos entre 7 estatísticos e 6 economistas. De quantas maneiras diferentes poderão ser formadas essas comissões?

169. Em um congresso há 30 professores de Matemática e 12 de Física. Quantas comissões poderíamos organizar compostas de 3 professores de Matemática e 2 de Física?

170. Quer-se criar uma comissão constituída de um presidente e mais 3 membros. Sabendo que as escolhas devem ser feitas dentre um grupo de 8 pessoas, quantas comissões diferentes podem ser formadas com essa estrutura?

171. Em um grupo de 15 pessoas existem 5 médicos, 7 engenheiros e 3 advogados. Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar, cada qual constituída de 2 médicos, 2 engenheiros e 1 advogado?

172. Os ingleses têm o costume de dar alguns nomes para as crianças. Qual é o número de maneiras diferentes de chamar uma criança, se existem 300 nomes diferentes e se uma criança não pode ter mais do que 3 nomes, todos diferentes entre si, e não se leva em conta sua ordem?

173. Em uma sala há 8 cadeiras e 4 pessoas. De quantos modos distintos essas pessoas poderão ocupar as cadeiras?

174. Existem 7 voluntários para exercer 4 funções distintas. Qualquer um deles está habilitado para exercer qualquer uma dessas funções. Portanto, podem ser escolhidos quaisquer 4 dentre os 7 voluntários e atribuir a cada um deles uma das 4 funções. Quantas possibilidades existem para essa atribuição?

175. Existem 5 pontos, entre os quais não existem 3 colineares. Quantas retas eles determinam?

176. Quantos planos são determinados por quatro pontos distintos e não coplanares?

177. Quantos triângulos são determinados por n pontos distintos do plano, e não alinhados 3 a 3?

178. Há 12 pontos, A, B, C, ..., dados num plano α, sendo que 3 desses pontos nunca pertencem a uma mesma reta. Qual é o número de triângulos que podemos formar, utilizando os 12 pontos e tendo o ponto A como um dos vértices?

179. Num plano existem 20 pontos, dos quais 3 nunca são colineares, exceto 6 que estão sobre uma mesma reta. Encontre o número de retas que esses pontos determinam.

180. Numa circunferência são tomados 8 pontos distintos.

a) Ligando-se 2 desses pontos, quantas cordas podem ser traçadas?

b) Ligando-se 3 desses pontos, quantos triângulos podem ser formados?

c) Ligando-se 6 desses pontos, quantos hexágonos podem ser formados?

181. Quantas diagonais tem um polígono regular de *n* lados?

Solução

O polígono tem *n* vértices: $A_1, A_2, ..., A_n$. Cada segmento é determinado por um par não ordenado de dois vértices $\left(\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_1}\text{, por exemplo}\right)$.

O número total de segmentos determinados será então $\binom{n}{2}$. Entre esses segmentos estão incluídos os lados e as diagonais. Como existem *n* lados, o número de diagonais será:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n!}{(n-2)!\,2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} =$$

$$= \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

182. Quantas diagonais, não das faces, tem:

a) um cubo?

b) um octaedro?

183. Sabe-se que o número total de vértices de um dodecaedro regular é 20 e que as faces são pentágonos. Quantas retas ligam dois vértices do dodecaedro, não pertencentes à mesma face?

184. Quantas diagonais, não das faces, tem um prisma cuja base é um polígono de *n* lados?

185. No espaço existem 7 pontos, entre os quais não existem 4 pontos coplanares. Quantos planos eles determinam?

186. No espaço existem *n* pontos, entre os quais não existem 4 coplanares, com exceção de 5 que estão num mesmo plano. Quantos planos os *n* pontos determinam?

187. Num plano são dados 19 pontos, entre os quais não se encontram 3 alinhados, nem 4 situados sobre uma mesma circunferência. Fora do plano, é dado mais um ponto. Quantas superfícies esféricas existem, cada uma passando por 4 dos 20 pontos dados?

188. São dados 12 pontos em um plano, dos quais 5 e somente 5 estão alinhados. Quantos triângulos distintos podem ser formados com vértices em 3 quaisquer dos 12 pontos?

Solução

Cada combinação de 3 pontos, entre os 12 existentes, dá origem a um triângulo, com exceção das combinações de 3 pontos, tomados entre os 5 alinhados; logo, o número de triângulos que podem ser formados é:

$$\binom{12}{3} - \binom{5}{3} = 210$$

189. São dadas 2 retas paralelas. Marcam-se 10 pontos distintos sobre uma e 8 pontos distintos sobre a outra. Quantos triângulos podemos formar ligando 3 quaisquer desses 18 pontos?

190. Seja P o conjunto dos pontos de p retas ($p \geqslant 2$), duas a duas paralelas, de um plano. Seja Q o conjunto dos pontos de q($q \geqslant 2$) retas, duas a duas paralelas do mesmo plano, concorrentes com as *p* primeiras. Calcule o número total de paralelogramos de vértices pertencentes ao conjunto $P \cap Q$ e de lados contidos no conjunto $P \cup Q$.

191. Com as letras *a, e, i, o, b, c, d, f, g*, quantas palavras (com ou sem sentido) de 6 letras distintas podem ser formadas, usando-se 3 vogais e 3 consoantes?

192. De quantas maneiras diferentes podemos colocar os 4 cavalos de um jogo de xadrez (2 brancos iguais e 2 pretos iguais) no tabuleiro do mesmo jogo (64 casas)?

193. Obtenha o número de maneiras que nove algarismos 0 e seis algarismos 1 podem ser colocados em sequência de modo que dois algarismos 1 não apareçam juntos.

Solução

– 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 –

Dispostos os nove zeros, existem 10 posições que os algarismos 1 podem ocupar (ver esquema acima).

Como existem 6 algarismos 1, precisamos escolher 6 lugares entre os 10 existentes.

Isso pode ser feito de $\binom{10}{6} = 210$ modos.

194. De quantas formas podemos alinhar em sequência *p* sinais "+" e *q* sinais "–" de modo que 2 sinais "–" nunca fiquem juntos?

(Observação: É dado que $p + 1 \geqslant q$.)

195. Considere as combinações de p elementos tomados m a m. Qual é a razão entre o número de combinações em que figura um certo elemento e o número de combinações em que esse elemento não figura?

196. Calcule o número de combinações de 8 elementos, 3 a 3, que contêm um determinado elemento.

197. Qual é o número de combinações de n elementos p a p que contêm k elementos determinados?

IX. Permutações com elementos repetidos

36. Consideremos a palavra ANA e procuremos seus anagramas. Vamos indicar por A* o segundo A. Teremos, então:

$$\underset{(1)}{\text{ANA*}},\ \underset{(2)}{\text{AA*N}},\ \underset{(3)}{\text{NAA*}},\ \underset{(4)}{\text{NA*A}},\ \underset{(5)}{\text{A*NA}},\ \underset{(6)}{\text{A*AN}}$$

Notemos que as permutações:

(1) e (5) são iguais;
(2) e (6) são iguais;
(3) e (4) são iguais.

Na verdade, não temos $3! = 6$ permutações distintas, mas apenas 3, que são:

ANA, AAN, NAA.

Essa diminuição do número de permutações decorreu do fato de termos duas letras iguais, A e A, no conjunto das letras a serem permutadas. É intuitivo perceber que o fato de existirem letras repetidas para serem permutadas acarreta uma diminuição do número de permutações, em relação ao número que teríamos, se todas fossem distintas.

37. Vamos calcular o número de permutações que podemos formar quando alguns elementos a serem permutados são iguais.

1º caso:

Consideremos n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1.

Indiquemos por $P_n^{n_1}$ o número de permutações nessas condições e calculemos esse número.

Cada permutação dos *n* elementos é uma ênupla ordenada de elementos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1 e os restantes $n - n_1$ elementos distintos

$$\underbrace{(\_, \_, \_, \ldots, \_)}_{n \text{ elementos}}.$$

Façamos o seguinte raciocínio: das *n* posições que existem na permutação, vamos escolher $n - n_1$ posições, para colocar os elementos todos distintos de a_1.

Existem $\binom{n}{n-n_1}$ modos de escolher essas posições.

Para cada escolha de $(n - n_1)$ posições, existem $(n - n_1)!$ modos em que os $(n - n_1)$ elementos podem ser permutados. Logo, existem ao todo

$$\binom{n}{n-n_1} \cdot (n - n_1)! = \frac{n!}{n_1!}$$

formas de dispormos os elementos distintos de a_1, na permutação.

Uma vez colocados esses elementos distintos, a posição dos elementos repetidos a_1 fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes.

Logo, existem $\dfrac{n!}{n_1!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1. Isto é:

$$\boxed{P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}}$$

Exemplo:

Quantos anagramas existem da palavra PARAGUAI?

$$\text{Temos} \begin{cases} \text{A, A, A} \rightarrow \text{elementos repetidos} \\ \text{P} \\ \text{R} \\ \text{G} \\ \text{U} \\ \text{I} \end{cases}$$

$n = 8$ e $n_1 = 3$, logo: $P_8^3 = \dfrac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$

2º caso:

Consideremos n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1: $\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n_1}$; n_2 são iguais a a_2: $\underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{n_2}$

e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1 e de a_2. Indiquemos por $P_n^{n_1, n_2}$ o número de permutações, nessas condições.

Cada permutação dos n elementos é uma ênupla ordenada de elementos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e os $n - n_1 - n_2$ elementos restantes.

Façamos o seguinte raciocínio: das n posições que existem na permutação, vamos escolher $n - n_2$ lugares para colocar todos os elementos, com exceção dos iguais a a_2. Existem $\binom{n}{n - n_2}$ modos de escolher esses lugares. Para cada uma dessas escolhas, existirão $P_{n-n_2}^{n_1}$ modos em que os $n - n_2$ elementos podem ser permutados (lembremos que, dos elementos a serem permutados agora, existem n_1 iguais a a_1). Ao todo existirão

$$\binom{n}{n - n_2} \cdot P_{n-n_2}^{n_1} = \frac{n!}{(n - n_2)!\, n_2!} \cdot \frac{(n - n_2)!}{n_1!} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!}$$

formas de arranjar na permutação todos os elementos, com exceção de a_2.

Uma vez arranjados esses elementos na permutação, as posições dos elementos repetidos a_2 ficam determinadas (de uma única forma) pelos lugares restantes. Logo, existirão $\frac{n!}{n_1!\, n_2!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1 e n_2 elementos iguais a a_2. Isto é:

$$\boxed{P_n^{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!}}$$

38. Exemplos:

1º) Quantos anagramas existem da palavra ANALITICA?

$$\text{Temos} \begin{cases} A, A, A \rightarrow \text{elementos repetidos} \\ I, I \quad\;\; \rightarrow \text{elementos repetidos} \\ N \\ L \\ T \\ C \end{cases}$$

$n = 9$, $n_1 = 3$, $n_2 = 2$

Logo:

$$P_9^{3,\,2} = \frac{9!}{3!\,2!} = 30\,240$$

2º) Existem 6 bandeiras (de mesmo formato), sendo 3 vermelhas e 3 brancas. Dispondo-as ordenadamente num mastro, quantos sinais diferentes podem ser emitidos com elas?

Temos:

Cada sinal emitido consta de uma permutação de 6 bandeiras, sendo 3 iguais a V (vermelhas) e 3 iguais a B (brancas).

Isto é, $n = 6$, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$.

Portanto, existem:

$$P_6^{3,\,3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20 \text{ sinais.}$$

39. Caso geral

Consideremos *n* elementos, dos quais:

n_1 são iguais a a_1
n_2 são iguais a a_2
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
n_r são iguais a a_r

Usando raciocínio análogo ao do 1º e do 2º caso, poderemos calcular o número de permutações nessas condições (indicado por $P_n^{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_r}$) através da fórmula:

$$\boxed{P_n^{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_r!}}$$

É fácil ver que no caso particular de $n_1 = n_2 = ... = n_r = 1$ obteremos:

$P_n^{1,\,1,\,...,\,1} = n!$

que é o número de permutações de *n* elementos distintos.

EXERCÍCIOS

198. De quantas formas 8 sinais "+" e 4 sinais "–" podem ser colocados em uma sequência?

199. Quantos números de 6 algarismos podemos formar permutando os algarismos 2, 2, 3, 3, 3, 5?

200. Sobre uma mesa são colocadas em linha 6 moedas. Quantos são os modos possíveis de colocar 2 caras e 4 coroas voltadas para cima?

201. Quantos anagramas existem da palavra AMARILIS?

202. Se uma pessoa gasta exatamente um minuto para escrever cada anagrama da palavra ESTATÍSTICA, quanto tempo levará para escrever todos, se não deve parar nenhum instante para descansar?

203. Uma moeda é lançada 20 vezes. Quantas sequências de caras e coroas existem, com 10 caras e 10 coroas?

204. Quantos números de 7 algarismos existem nos quais comparecem uma só vez os algarismos 3, 4, 5 e quatro vezes o algarismo 9?

205. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 2 amarelas. Elas são extraídas uma a uma sem reposição. Quantas sequências de cores podemos observar?

206. Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal. Ele só pode dar um passo de cada vez, para norte (N) ou para leste (L). Quantas trajetórias (caminhos) existem da origem ao ponto P(7, 5)?

Solução

Notemos inicialmente que o homem terá que dar, ao todo, $7 + 5 = 12$ passos (7 para leste e 5 para norte).

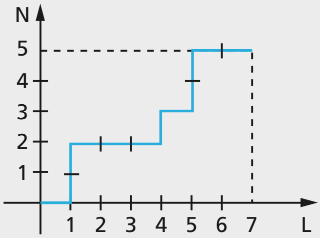
Cada trajetória possível é, então, uma sequência de 12 elementos, sendo 7 L e 5 N.

A trajetória da figura é:

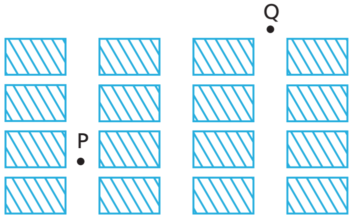
(L, N, N, L, L, L, N, L, N, N, L, L).

Se quisermos o número de trajetórias, teremos que calcular então o número de permutações com repetição de 12 elementos, sendo 7 L e 5 N. Portanto, o número de trajetórias é:

$P_{12}^{7,\,5} = \dfrac{12!}{7!\,5!} = 792$



207. Uma cidade é formada por 16 quarteirões dispostos segundo a figura ao lado. Uma pessoa sai do ponto P e dirige-se para o ponto Q pelo caminho mais curto, isto é, movendo-se da esquerda para a direita, ou de baixo para cima. Nessas condições, quantos caminhos diferentes ela poderá fazer?



208. Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal. Ele só pode dar um passo de cada vez, para norte (N) ou para leste (L). Partindo da origem e passando pelo ponto A(3, 1), quantas trajetórias existem até o ponto B(5, 4)?

209. Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de quantas formas podemos permutá-los de modo que os números ímpares fiquem sempre em ordem crescente?

210. Uma classe tem *a* meninas e *b* meninos. De quantas formas eles podem ficar em fila, se as meninas devem ficar em ordem crescente de peso, e os meninos também? (Suponha que 2 pessoas quaisquer não tenham o mesmo peso.)

X. Complementos

Partições ordenadas

40. Consideremos um conjunto A e K subconjuntos de A não vazios $A_1, A_2, \ldots, A_k$, tais que:

a) $A_i \cap A_j = \varnothing$ (para $i \neq j$)

b) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_K = A$

Chamaremos de **partição ordenada do conjunto A** a sequência de conjuntos:

$(A_1, A_2, \ldots, A_K)$

41. Exemplos:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e consideremos as sequências de conjuntos

1) $(\{1, 2\}; \{3, 4\}; \{5, 6\})$
2) $(\{1, 2, 3, 4\}; \{5\}; \{6\})$
3) $(\varnothing; \{1, 2, 3, 4\}; \{5, 6\})$
4) $(\{1, 2, 3\}; \{3, 4, 5\}; \{6\})$
5) $(\{1, 2\}; \{3, 4, 5\})$.

Nos exemplos (1) e (2) temos partições ordenadas de A, ao passo que em (3) não temos, pois $\varnothing$ faz parte da sequência. Em (4) não temos uma partição ordenada, pois $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} \neq \varnothing$ e finalmente, em (5), $\{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} \neq A$.

Observemos que a partição ordenada $(\{1, 2\}; \{3, 4\}; \{5, 6\})$ é diferente da partição ordenada $(\{5, 6\}; \{3, 4\}; \{1, 2\})$, pois cada partição, sendo uma sequência de conjuntos, **depende da ordem deles.**

42. Podemos resolver alguns problemas combinatórios com auxílio do conceito de partição ordenada.

Exemplo:

De quantas maneiras podemos colocar 10 pessoas em três salas, A, B e C, de modo que em A fiquem 4 pessoas, em B fiquem 3 pessoas e em C também 3 pessoas?

Notemos que cada modo de distribuir as 10 pessoas corresponde a uma partição ordenada do tipo:

$$(\underbrace{\{\_\_, \_\_, \_\_, \_\_\}}_{\substack{\text{pessoas na} \\ \text{sala A}}}; \underbrace{\{\_\_, \_\_, \_\_\}}_{\substack{\text{pessoas na} \\ \text{sala B}}}; \underbrace{\{\_\_, \_\_, \_\_\}}_{\substack{\text{pessoas na} \\ \text{sala C}}})$$

Para calcularmos o número de partições ordenadas, façamos o seguinte raciocínio:

Escolhemos 4 entre 10 pessoas para ficarem em A. Isto pode ser feito de $\binom{10}{4}$ maneiras.

Em seguida, entre as 6 pessoas restantes, escolhemos 3, para ficarem em B. Isto pode ser feito de $\binom{6}{3}$ maneiras.

As 3 pessoas restantes podem ser escolhidas de $\binom{3}{3} = 1$ maneira (isto é, as pessoas da sala C ficam determinadas).

Ora, cada combinação de pessoas em A gera $\binom{6}{3}$ maneiras de dispor 3 pessoas em B.

Logo, o número total de partições é:

$$\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} = \frac{10!}{4!\,6!} \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{10!}{4!\,3!\,3!} = 4\,200$$

Isto é, existem 4 200 modos de dispormos as 10 pessoas nas 3 salas.

Partições não ordenadas

43. Consideremos um conjunto A e K subconjuntos de A não vazios $A_1, A_2, \dots, A_k$, tais que:

a) $A_i \cap A_j = \varnothing$ (para $i \neq j$)

b) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = A$

Chamaremos de **partição não ordenada de A** a família:

$\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$

44. Exemplo:

Seja o conjunto: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e consideremos as famílias:

1) $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ é uma partição.
2) $\{\{1, 2\}; \{3, 4, 5, 6\}\}$ é uma partição.
3) $\{\{1, 2\}; \{3\}\}$ não é uma partição.
4) $\{\{1, 2, 3, 4\}; \{3, 4, 5, 6\}\}$ não é uma partição.

45. Alguns problemas combinatórios podem ser resolvidos com este conceito.

Exemplo:

De quantos modos 12 pessoas podem ser distribuídas em 3 grupos, tendo cada grupo 4 pessoas?

Consideremos, para fixar ideias, 3 grupos, A_1, A_2 e A_3.

Notemos que a ordem em que figuram pode ser qualquer uma que teremos **a mesma** distribuição em 3 grupos. Estamos então interessados no número de partições não ordenadas do tipo:

$$\underbrace{\{\{\_\_, \_\_, \_\_, \_\_\}}_{\text{grupo } A_1}; \underbrace{\{\_\_, \_\_, \_\_, \_\_\}}_{\text{grupo } A_2}; \underbrace{\{\_\_, \_\_, \_\_, \_\_\}\}}_{\text{grupo } A_3}$$

Para calcularmos o número de partições não ordenadas, façamos o seguinte raciocínio:

1º) Calculemos o número de partições ordenadas

$\{\{-, -, -, -\}; \{-, -, -, -\}; \{-, -, -, -\}\}$

que, com o raciocínio do exemplo anterior, sabemos ser:

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 34\,650$$

2º) Cada grupo de $3! = 6$ partições ordenadas dá origem à mesma partição não ordenada.

3º) Logo, o número de partições não ordenadas será:

$$\frac{34\,650}{6} = 5\,775$$

Soluções inteiras não negativas de uma equação linear

46. Consideremos a equação linear $x + y = 7$ e encontremos seu número de soluções inteiras não negativas.

Por tentativas, encontramos:

(0, 7); (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1); (7, 0)

Ao todo temos 8 soluções inteiras não negativas.

47. Agora, se tivermos a equação $x + y + z = 7$, resolvendo por tentativas, o trabalho será muito grande, e corremos o risco de "esquecer" alguma solução.

Um raciocínio alternativo seria o seguinte:

Temos que dividir 7 unidades em 3 partes ordenadas, de modo que fique em cada parte um número maior ou igual a zero.

Indiquemos cada unidade por um ponto. Então, elas serão representadas por:

$$\square \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \square$$

Como queremos dividir as 7 unidades em 3 partes, vamos usar duas barras para fazer a separação.

Cada modo de dispormos os pontos e as barras dará origem a uma solução. Por exemplo:

$$\square \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet}_{3} \; \Big| \; \underbrace{\bullet \quad \bullet}_{2} \; \Big| \; \underbrace{\bullet \quad \bullet}_{2} \quad \square$$

$$\square \quad \underbrace{\bullet}_{1} \; \Big| \; \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet}_{4} \; \Big| \; \underbrace{\bullet \quad \bullet}_{2} \quad \square$$

$$\square \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet}_{2} \; \Big| \underbrace{}_{0} \Big| \; \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet}_{5} \quad \square$$

$$\square \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet}_{3} \; \Big| \; \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet}_{4} \; \Big| \underbrace{}_{0} \; \square$$

Ora, como temos 9 símbolos $\left\{\begin{array}{l} 7 \bullet \\ \text{e} \\ 2 \mid \end{array}\right.$

o número de permutações desses símbolos será:

$$P_9^{7,\,2} = \frac{9!}{7!\,2!} = 36$$

que é o número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z = 7$.

Tal raciocínio pode ser generalizado pelo:

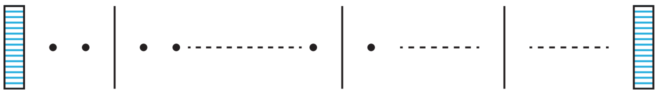
48. Teorema

O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = r$ é:

$$\frac{(n + r - 1)!}{r!\,(n - 1)!}$$

Demonstração:

De fato, cada solução da equação é uma permutação de *r* símbolos • e (n − 1) símbolos | (precisamos de (n − 1) barras para dividir *r* pontos em *n* partes).



O número de permutações (soluções da equação) será:

$$P_{n+r-1}^{(n-1),\, r} = \frac{(n + r - 1)!}{r!\,(n - 1)!}$$

49. Exemplo de aplicação:

Um bar vende 3 tipos de refrigerantes: guaraná, soda e tônica. De quantas formas uma pessoa pode comprar 5 garrafas de refrigerantes?

Seja:

x o número de garrafas de guaraná

y o número de garrafas de soda

z o número de garrafas de tônica

É claro que $x, y, z \in \mathbb{N}$ e $x + y + z = 5$.

Trata-se então de achar o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x + y + z = 5$$

que é, então: $\dfrac{(5 + 3 - 1)!}{5!\,(3 - 1)!} = \dfrac{7!}{5!\,2!} = 21$

EXERCÍCIOS

211. Um grupo de 10 viajantes para para dormir num hotel. Só havia 2 quartos com 5 lugares cada um. De quantas formas eles puderam se distribuir para dormir naquela noite?

212. De quantos modos 8 pessoas podem ocupar duas salas distintas, devendo cada sala conter pelo menos 3 pessoas?

213. Dez alunos devem ser distribuídos em 2 classes, de 7 e 3 lugares respectivamente. De quantas maneiras distintas pode ser feita essa distribuição?

214. Separam-se os números inteiros de 1 a 10 em dois conjuntos de 5 elementos, de modo que 1 e 8 não estejam no mesmo conjunto. Isso pode ser feito de *n* modos distintos. Qual é o valor de *n*?

215. Dentre 6 números positivos e 6 números negativos, de quantos modos podemos escolher quatro números cujo produto seja positivo?

216. De quantas formas 12 estudantes podem ser divididos e colocados em 3 salas, sendo 4 na primeira, 5 na segunda e 3 na terceira?

217. De quantas maneiras podemos atribuir os nomes de Paulo, Antônio e José a 11 meninos, com a condição de que 3 deles se chamem Paulo, 2 Antônio e 6 José?

218. Um baralho tem 52 cartas. De quantos modos podemos distribuí-las entre 4 jogadores, de modo que cada um receba 13 cartas?

219. De quantas formas 20 alunos podem ser colocados em 4 classes, A, B, C, D, ficando 5 alunos por classe?

220. De quantas formas podemos distribuir 10 bolinhas, numeradas de 1 a 10, em 2 urnas, A e B (podendo eventualmente uma ficar vazia)?

221. De quantas formas podemos repartir 9 pessoas em 3 grupos, ficando 3 pessoas em cada grupo?

222. Com 10 pessoas, de quantas maneiras podemos formar dois times de bola ao cesto?

223. De quantas formas 15 pessoas podem ser divididas em 3 times, com 5 pessoas por time?

224. Quantas soluções inteiras não negativas têm as equações:

a) $x + y + z = 6$

b) $x + y + z + t = 10$

c) $x + y + z + t + w = 10$

225. Quantas soluções inteiras tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$, se cada x_i é tal que $x_i \geqslant 3$ $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

226. Uma pastelaria vende pastéis de carne, queijo e palmito. De quantas formas uma pessoa pode comer 5 pastéis?