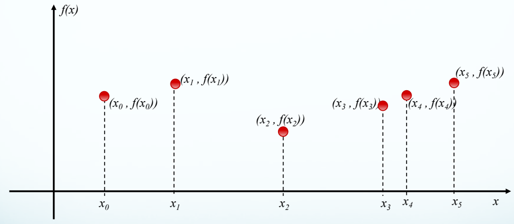
Interpolação Polinomial

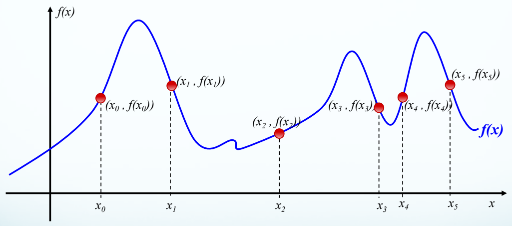
0011 0010

Graficamente:



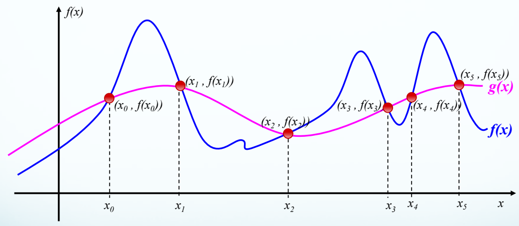
0011 0010

Graficamente:



0011 0010

Graficamente:



0011 0010

Forma de Lagrange

0011 0010

Vamos considerar o conjunto de $n+1$ pontos (x_k, f_k), $k = 0, 1, 2, ..., n,$ distintos e vamos considerar o polinômio representado por

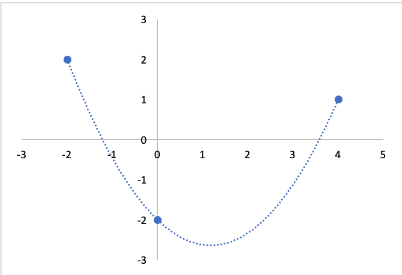
$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \cdots + f_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$$

Logo $p_n(x)$ satisfaz a condição de interpolação, sendo assim, o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$. Os polinômios $L_k(x)$ são chamados de **polinômios de Lagrange** e estes são obtidos da seguinte forma:

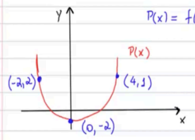
$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)\ (x-x_1)\ \cdots\ (x-x_{k-1})\ (x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})\ (x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

0011 0010

x	y
-2	2
0	-2
4	1



Interpolação Polinomial - Polinômio de Lagrange



$P(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + f(x_2)\, L_2(x)$

$x_0 = -2 \quad f(x_0) = +2$

$x_1 = 0 \quad f(x_1) = -2$

$x_2 = 4 \quad f(x_2) = 1$

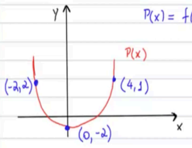
$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)\cdot(x-4)}{(-2-0)(-2-4)} = \left(\frac{x^2-4x}{12}\right)\cdot 2 = \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)} = \frac{(x+2)\cdot(x-4)}{(0+2)\cdot(0-4)} = \left(\frac{x^2-2x-8}{-8}\right)\cdot(-2) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - 2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)} = \frac{(x+2)\cdot(x-0)}{(4+2)\cdot(4-0)} = \left(\frac{x^2+2x}{24}\right)\cdot 1 = \frac{x^2}{24} + \frac{x}{12}$$

$$P(x) = \frac{11x^2}{24} - \frac{13x}{12} - 2$$

Interpolação Polinomial - Polinômio de Lagrange



$P(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + f(x_2)\, L_2(x)$

$x_0 = -2 \quad f(x_0) = +2$

$x_1 = 0 \quad f(x_1) = -2$

$x_2 = 4 \quad f(x_2) = 1$

x_i	$P(x)$	$f(x_i)$	
-2	$P(-2) = \frac{11\cdot(-2)^2}{24} - \frac{13\cdot(-2)}{12} - 2$	$= 2$	$\longrightarrow (-2, 2)$
0	$P(0) = \frac{11\cdot 0^2}{24} - \frac{13\cdot 0}{12} - 2$	$= -2$	$\longrightarrow (0, -2)$
4	$P(4) = \frac{11\cdot 4^2}{24} - \frac{13\cdot 4}{12} - 2$	$= 1$	$\longrightarrow (4, 1)$

Exemplo: Vamos considerar a tabela de pontos do exemplo anterior e determinar uma aproximação para $f(0.3)$ usando a forma de Lagrange.

x_k	0.0	0.2	0.4
f_k	4.00	3.84	3.76

Calculando os $L_k(x)$ temos:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.2)(x-0.4)}{(0-0.2)(0-0.4)} = \frac{1}{0.08}(x^2-0.6x+0.08)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-0.4)}{(0.2-0)(0.2-0.4)} = -\frac{1}{0.04}(x^2-0.4x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-0.2)}{(0.4-0)(0.4-0.2)} = \frac{1}{0.08}(x^2-0.2x)$$

Fazendo: $p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$

Obtemos: $p(x) = x^2 - x + 4$.

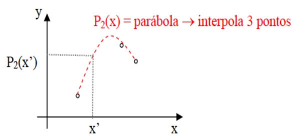
Observe que o polinômio é o mesmo que foi obtido via sistema linear. Isto já era esperado, pois o polinômio interpolador **é único**.

Desta forma, para $x = 0,3 \in [0, 0.4]$, teremos $f(0.3) \approx p(0.3) = 3.79$.

3.2. Interpolação quadrática

Sejam três pares ordenados (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2), com x_i distintos, de uma função $y = f(x)$. Para obtermos uma aproximação de $f(x')$, $x' \in (x_0, x_2)$ faz-se a seguinte aproximação:

$$f(x) \approx P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$



onde $P_2(x)$ é um polinômio interpolador de 2ª ordem, ou grau 2. Impondo que o polinômio interpolador passe pelos três pares ordenados, temos o seguinte sistema de equações lineares de 3ª ordem:

$$\begin{matrix} P_2(x_0) = y_0 \\ P_2(x_1) = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

ou reescrevendo na forma matricial temos:

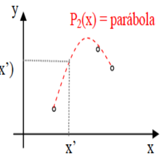
$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

O sistema de equações lineares admite uma única solução, pois o $Det(X) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0) \neq 0$.Desta forma, pelos três pares ordenados passa um único polinômio interpolador de 2ª grau. Este fato pode ser generalizado, dizendo-se que por $n+1$ pontos passa um único polinômio de grau n.

Exemplo 2

Determinar $P_2(0.2)$ usando os dados da tabela abaixo:

i	0	1	2
x_i	0.1	0.6	0.8
y_i	1.221	3.320	4.953



Os coeficientes do polinômio interpolador são determinados pela solução do sistema linear

$P_2(x_i)=f(x_i)=y_i$

$$\begin{matrix} a_0 \times 1 + a_1 \times 0.1 + a_2 \times 0.1^2 = 1.221 \\ a_0 \times 1 + a_1 \times 0.6 + a_2 \times 0.6^2 = 3.320 \\ a_0 \times 1 + a_1 \times 0.8 + a_2 \times 0.8^2 = 4.953 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.1^2 \\ 1 & 0.6 & 0.6^2 \\ 1 & 0.8 & 0.8^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.221 \\ 3.320 \\ 4.953 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de baixo para cima temos:
$a_2 = 5.667$; $a_1 = 0.231$ $a_0 = 1.141$

Dessa forma o polinômio $P_2(x)$ terá a seguinte forma:

$$\boxed{P_2(x) = 1.141 + 0.231x + 5.667x^2}$$

Forma de Newton

FÓRMULA DE NEWTON PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR

Seja $f(x)$ uma função contínua e com derivadas contínuas em $[a, b]$.

Sejam $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $n+1$ pontos distintos da função.

Deseja-se construir o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ nestes pontos.

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio, obtém-se a fórmula de Newton para o polinômio interpolador dada por:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

Dica: $P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0,x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0,x_1,x_2]$

onde $f[x_0] = f(x_0)$;

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

e o erro de truncamento dado pela expressão:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]$$

Esquema prático

x_i	$f[x_i]$	$[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$\dots$
x_0	$f[x_0] = f_0$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1] = f_1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$\dots$
x_2	$f[x_2] = f_2$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$\dots$
x_3	$f[x_3] = f_3$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$	$\vdots$	$\dots$
x_4	$f[x_4] = f_4$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

Considere a seguinte tabela:

x	1	3	4	5
f(x)	0	6	24	60

Diferença Dividida

	x	f(x)	Δ1	Δ2	Δ3
x_0	1	0			
			$\frac{6-0}{3-1} = 3$		
x_1	3	6		$\frac{18-3}{4-1} = 5$	
			$\frac{24-6}{4-3} = 18$		$\frac{9-5}{5-1} = 1$
x_2	4	24		$\frac{36-18}{5-3} = 9$	
			$\frac{60-24}{5-4} = 36$		
x_3	5	60			

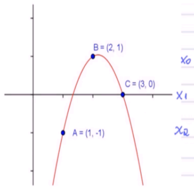
$P(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \Delta_1 + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \Delta_2 + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \Delta_3$

$P(x) = 0 + (x - 1) \cdot 3 + (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot 5 + (x - 1) \cdot (x - 3)(x - 4) \cdot 1$

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

0011 0010

Observe o gráfico a seguir



	x	y	Δ1
x_0	1	-1	
			$\frac{1-(-1)}{2-1} = 2$
x_1	2	1	
			$\frac{0-1}{3-2} = -1$
x_2	3	0	

Δ2

$\frac{-1-2}{3-1} = -\frac{3}{2}$

Determine o polinômio interpolador de Newton

$P(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \Delta_1 + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \Delta_2$

$P(x) = -1 + (x - 1) \cdot 2 + (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot -3/2$

$P(x) = -1 + 2x - 2 + (x^2 - 3x + 2) \cdot -3/2$

$P(x) = -1 + 2x - 2 - \frac{3x^2}{2} + \frac{9x}{2} - 3 \longrightarrow P(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - 6$

$\boxed{P(x) = -1.5x^2 + 6.5x - 6}$

Interpolação Polinomial

Interpolação com diferenças finitas (Gregory Newton):

Este método é um caso especial do método de Newton, quando os valores dos x_i estão igualmente espaçados. Neste caso, trabalhamos com um novo operador: O operador de diferença finita ascendente (Δ).

0011 0010

Operador de diferença finita ascendente:

Este operador é mais simples de calcular do que o operador de diferenças divididas, pois leva em conta somente os valores de y:

Ordem 0: $\Delta^0 y_i = y_i$

Ordem 1: $\Delta y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i$

Ordem 2: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$

$\vdots \qquad \vdots$

Ordem n: $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

0011 0010

Interpolação Polinomial

A relação entre os operadores de diferença dividida e de diferença finita ascendente é:

$$\Delta^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!\,h^n}$$

0011 0010

Fórmula de Gregory Newton:

O polinômio interpolador de Gregory-Newton é encontrado através da seguinte fórmula:

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\Delta^i y_0}{i!}.\prod_{j=0}^{i-1}(u_x - j)\right]$$

Onde:

h é o passo dos valores x_i, ou seja $h = x_{i+1} - x_i$

u_x é encontrado através da fórmula:

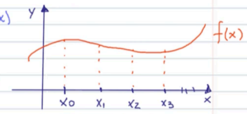
$$u_x = \frac{x - x_0}{h}$$

0011 0010

Interpolação Polinomial: Método de Newton-Gregory

Diferença Finita NOTAÇÃO $\Delta^r f(x) \Rightarrow \Delta^0 f(x) = f(x)$

$x_0 \rightarrow +h \Rightarrow x_1 + h \Rightarrow x_2 + h \Rightarrow x_3$



$\Rightarrow$ EQUIDISTANTES

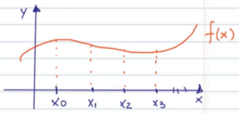
$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1}$

	$\Delta^0 f(x)$	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
x_0	$y_0 = \Delta^0 f(x_0)$	$\Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_1) - \Delta^1 f(x_0)$
x_1	$y_1 = \Delta^0 f(x_1)$	$\Delta^1 f(x_1) = \Delta^0 f(x_2) - \Delta^0 f(x_1)$	
x_2	$y_2 = \Delta^0 f(x_2)$		FORMA GERAL
$\vdots$	$\vdots$		$\Delta^r f(x) = \Delta^{r-1} f(x+h) - \Delta^{r-1} f(x)$
x_n	$y_n = \Delta^0 f(x_n)$		

0011 0010

Interpolação Polinomial: Método de Newton-Gregory

Diferença Finita



EQUIDISTANTES

$$P(x) = \Delta^0 f(x) + (x - x_0).\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!\,h^1} + (x - x_0).(x - x_1).\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2} + \ldots +$$

$$+ (x - x_0).(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).\frac{\Delta^n f(x_0)}{n! \cdot h^n}$$

0011 0010

Considere a função f(x) com os pontos dados da tabela:Determine o polinômio interpolador usando o método de Newton-Gregory.

x	0	1	2
f(x)	0	1/2	2/3

$h = 1$

	$\Delta^0 f(x)$	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
$x_0 = 0$	$\Delta^0 f(x_0) = 0$	$\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$	
$x_1 = 1$	$\Delta^0 f(x_1) = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$
$x_2 = 2$	$\Delta^0 f(x_2) = \frac{2}{3}$		

$$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0).\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!\,h^1} + (x - x_0)(x - x_1).\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2} \qquad 2! = 2.1$$

$$P(x) = 0 + (x - 0).\tfrac{1}{2} + (x - 0)(x - 1).\frac{-1/3}{2.1} \Rightarrow \boxed{P(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x}$$

0011 0010