CAPÍTULO II
Binômio de Newton

I. Introdução

50. Vamos usar as técnicas que estudamos em Análise Combinatória para ter um resultado importante em Álgebra, que consiste em obter o desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$.

Já nos são familiares os casos particulares:

$(x + a)^0 = 1$
$(x + a)^1 = x + a$
$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

Para todo *n* inteiro, positivo, podemos calcular:

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a) \cdot (x + a) \cdot \ldots \cdot (x + a)}_{n \text{ fatores}}$$

usando a propriedade distributiva da multiplicação.

51. O procedimento é o seguinte:

1º) De cada fator $(x + a)$ escolhemos exatamente um termo, que poderá ser *x* ou *a*. Esse termo deve ser multiplicado pelos termos do(s) outro(s) fator(es).

2º) Em seguida, repete-se o processo escolhendo o outro termo.

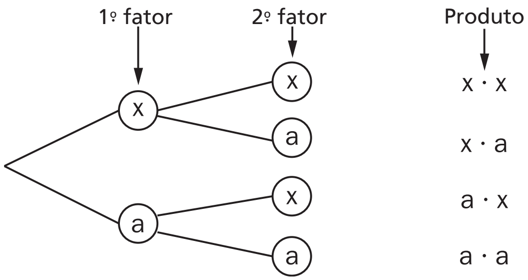
3º) Tomamos todos os produtos obtidos e calculamos sua soma (que consiste em reduzir os termos semelhantes).

4º) Essa soma é o resultado do desenvolvimento de $(x + a)^n$.

52. Exemplo 1:

$(x + a)^2 = (x + a) \cdot (x + a)$

Usamos o diagrama de árvore para as seleções dos termos.

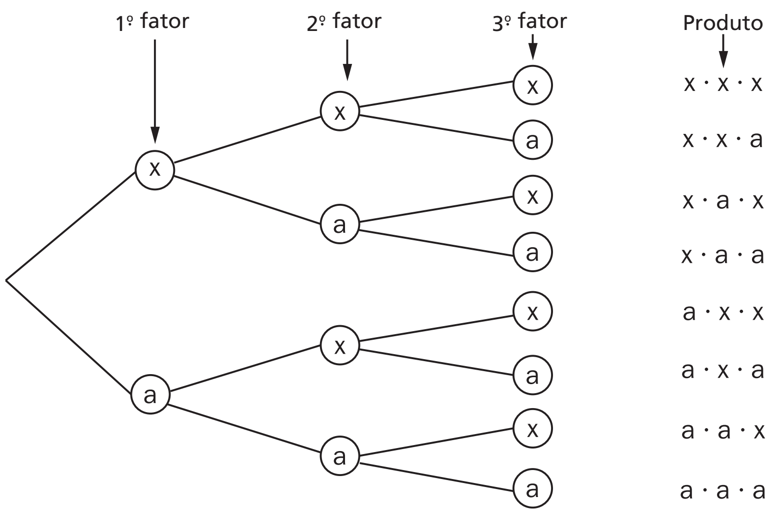


Soma: $x \cdot x + x \cdot a + a \cdot x + a \cdot a = x^2 + 2ax + a^2$

Portanto, $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

53. Exemplo 2:

$(x + a)^3 = (x + a) \cdot (x + a) \cdot (x + a)$



Soma: $x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot a + x \cdot a \cdot x + x \cdot a \cdot a + a \cdot x \cdot x + a \cdot x \cdot a + a \cdot a \cdot x + a \cdot a \cdot a =$
$= x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

Portanto, $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3ax^2 + a^3$.

54. O problema que surge é o seguinte. Será que podemos obter os termos do desenvolvimento de $(x + a)^n$ sem recorrer ao diagrama de árvore?

A resposta é positiva. Vamos mostrar como isso é possível por meio de um exemplo particular e, em seguida, vamos generalizar o resultado obtido.

Exemplo:
$(x + a)^3 = (x + a) \cdot (x + a) \cdot (x + a)$
Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos, que devem ser multiplicados entre si.
Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3; $x^2 \cdot a$; $x \cdot a^2$; a^3
Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo.

1º) x^3
Só existe uma maneira de obter o produto $x^3 = x \cdot x \cdot x$, que é escolhendo somente o termo "x" de cada fator. Logo, o coeficiente de x^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{0}$.

2º) $x^2 \cdot a$
A quantidade de produtos do tipo $x^2 \cdot a$ é igual ao número de sequências de três letras em que duas são iguais a "x" e uma é igual a "a". Isto é:

$$P_3^{2,\,1} = \frac{3!}{2!\,1!} = \binom{3}{1}$$

Logo, o coeficiente de $x^2 \cdot a$ é $\binom{3}{1}$.

3º) $x \cdot a^2$
A quantidade de produtos do tipo $x \cdot a^2$ é igual ao número de sequências de três letras em que uma é igual a "x" e duas são iguais a "a". Isto é:

$$P_3^{1,\,2} = \frac{3!}{1!\,2!} = \binom{3}{2}$$

Logo, o coeficiente de $x \cdot a^2$ é $\binom{3}{2}$.

4º) a^3
Só existe uma maneira de obter o produto $a^3 = a \cdot a \cdot a$, que é escolhendo somente o termo "a" de cada fator. Logo, o coeficiente de a^3 no desenvolvimento do binômio é:

1 ou $\binom{3}{3}$

Em resumo:

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1} \cdot x^2 \cdot a + \binom{3}{2} \cdot x \cdot a^2 + \binom{3}{3} \cdot a^3$$

II. Teorema binomial

O desenvolvimento de $(x + a)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$ é dado por:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \dots + \dots +$$

$$+ \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^n$$

Demonstração:

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a) \cdot (x + a) \cdot \dots \cdot (x + a)}_{n \text{ fatores}}$$

Pela propriedade distributiva da multiplicação e tendo em vista os exemplos precedentes, concluímos que os diferentes tipos de termos que podem ser obtidos na multiplicação são:

$$x^n;\ x^{n-1} \cdot a;\ x^{n-2} \cdot a^2;\ \dots;\ x^{n-p} \cdot a^p;\ \dots;\ a^n$$

Vejamos agora a quantidade de cada um desses diferentes tipos de termos.

1º) x^n

O produto x^n só pode ocorrer de uma forma: $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fatores}}$ e, portanto,

o coeficiente de x^n é 1 ou $\binom{n}{0}$.

2º) $x^{n-1} \cdot a$

O produto $x^{n-1} \cdot a$ pode ocorrer de tantas formas quantas pudermos permutar $(n - 1)$ letras "x" e uma letra "a". Isto é:

$$P_n^{n-1,\,1} = \frac{n!}{(n-1)!\ 1!} = \binom{n}{1}$$

Portanto, o coeficiente de $x^{n-1} \cdot a$ é $\binom{n}{1}$.

3º) $x^{n-2} \cdot a^2$

O produto $x^{n-2} \cdot a^2$ pode ocorrer de tantas formas quantas pudermos permutar (n – 2) letras “x” e duas letras “a”. Isto é:

$$P_n^{n-2,\,2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \binom{n}{2}$$

Portanto, o coeficiente de $x^{n-2} \cdot a^2$ é $\binom{n}{2}$.

4º) $x^{n-p} \cdot a^p$

Genericamente, o produto $x^{n-p} \cdot a^p$ pode ocorrer de tantas formas quantas pudermos permutar (n – p) letras “x” e p letras “a”. Isto é:

$$P_n^{n-p,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p}.$$

Portanto, o coeficiente de $x^{n-p} \cdot a^p$ é $\binom{n}{p}$.

5º) a^n

Finalmente, o produto a^n só pode ocorrer de uma forma, que é:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Portanto, o coeficiente de a^n e 1 ou $\binom{n}{n}$.

Das considerações feitas acima, concluímos que:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a^1 + \ldots + \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n,$$

que é o que queríamos demonstrar.

55. Exemplo:

Desenvolver $(3x^2 + a)^4$.

Temos:

$$(3x^2 + a)^4 = \binom{4}{0} \cdot (3x^2)^4 + \binom{4}{1} \cdot (3x^2)^3 \cdot a^1 + \binom{4}{2} \cdot (3x^2)^2 \cdot a^2 + \binom{4}{3} \cdot (3x^2) \cdot a^3 +$$

$$+ \binom{4}{4} \cdot a^4$$

$$(3x^2 + a)^4 = 81x^8 + 108x^6a + 54x^4a^2 + 12x^2a^3 + a^4$$

EXERCÍCIOS

230. Desenvolva, usando o teorema binomial:

a) $(x + 3b)^3$
b) $(1 - x^2)^5$
c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$
d) $(\text{sen } \theta + \cos \theta)^4$
e) $(3 - y)^5$

231. Desenvolva, usando o teorema binomial

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)^5 - \left(m - \frac{1}{m}\right)^5.$$

232. Desenvolva $(x + a)^7$.

233. Calcule *a* e *b*, sabendo que $(a + b)^3 = 64$ e que

$$a^5 - \binom{5}{1} a^4 \cdot b + \binom{5}{2} \cdot a^3 \cdot b^2 - \binom{5}{3} \cdot a^2 \cdot b^3 + \binom{5}{4} ab^4 - b^5 = -32.$$

234. Quantos termos tem o desenvolvimento de:

a) $(x + y)^7$?
b) $(x + y)^{10}$?
c) $(x + y)^n$?

235. a) Quantos termos tem o desenvolvimento de $(x + a)^{50}$?

b) Escreva os 4 primeiros termos, sem os coeficientes, em potências de expoentes decrescentes de *x*.

236. No desenvolvimento de $(x + y)^{1000}$, qual o centésimo termo, se o desenvolvimento for feito em potências de expoentes decrescentes de *x*?

237. Quais os 3 primeiros termos do desenvolvimento de $(x + y)^{100}$ segundo as potências de expoentes decrescentes de *x*?

III. Observações

56. Os números:

$$\binom{n}{0}; \binom{n}{1}; \binom{n}{2}; \dots; \binom{n}{p}; \dots; \binom{n}{n}$$

são chamados **coeficientes binomiais**. No coeficiente binomial $\binom{n}{p}$, *n* é chamado **numerador** e *p*, **denominador**.

57. O teorema binomial é válido para $(x - a)^n$, pois basta escrevermos $(x - a)^n$ como $[x + (-a)]^n$ e aplicarmos o teorema.

Exemplo:

$(x - 2y)^4 = [x + (-2y)]^4 =$

$= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(-2y)^1 + \binom{4}{2}x^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}x^1 \cdot (-2y)^3 + \binom{4}{4}(-2y)^4 =$

$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$

EXERCÍCIOS

238. Sabendo que:

$$a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5 = 1024$$

Calcule o valor de $(a + b)^2$.

239. Determine o valor da expressão:

$99^5 + 5(99)^4 + 10(99)^3 + 10(99)^2 + 5(99) + 1$

240. Calcule o valor numérico do polinômio:

$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$ para $x = \dfrac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}}$ e $y = \dfrac{\sqrt{6} - 1}{\sqrt[4]{5}}$

241. Calcule o valor de $S = \binom{20}{0} + \binom{20}{1}2 + \binom{20}{2}2^2 + \ldots + \binom{20}{19}2^{19} + \binom{20}{20}2^{20}$.

242. Calcule o valor da expressão $\left(1 - \sqrt{5}\right)^5 - \left(1 + \sqrt{5}\right)^5$.

243. Calcule o valor numérico da expressão:

$$x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + y^n, \text{ para } x = y = 1$$

244. Calcule o valor de S, sabendo que:

$S = (x^3 - 1)^4 + 4(x^3 - 1)^3 + 6(x^3 - 1)^2 + 4(x^3 - 1) + 1$

245. Qual é o valor de $\displaystyle\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}(2)^x(3)^{n-x}$?

58. Termo geral

Já vimos que:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot a + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p} \cdot a^p + \ldots + \binom{n}{n}a^n$$

O termo:

$$\binom{n}{p}x^{n-p}\,a^p$$

é chamado geral, pois fazendo $p = 0, 1, 2, \ldots, n$ obtemos todos os termos do desenvolvimento.

Notemos ainda que, $\forall p$, a soma dos expoentes de *x* e *a* é sempre *n*. Além disso, o expoente de *x* é igual à diferença entre o numerador e o denominador do coeficiente binomial correspondente.

Exemplos:

1º) No desenvolvimento de $(x^2 + 1)^6$, qual o coeficiente de x^8?

Temos:

O termo geral do desenvolvimento é: $\binom{6}{p}(x^2)^{6-p} \cdot 1^p = \binom{6}{p}x^{12-2p}$

Como queremos o termo que possua x^8, devemos impor que $12 - 2p = 8$, isto é, $p = 2$.

Logo, o termo que possui x^8 é:

$$\binom{6}{2} \cdot (x^2)^4 = \binom{6}{2} \cdot x^8$$

Seu coeficiente é: $\binom{6}{2} = 15$

2º) Qual o termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$?

O termo geral é: $\binom{6}{2}x^{8-p}\left(\frac{-1}{x}\right)^p = \binom{8}{p}x^{8-p} \cdot (-1)^p \cdot x^{-p} = \binom{8}{p}(-1)^p\,x^{8-2p}$

Para que ele independa de *x*, devemos ter $8 - 2p = 0$, isto é, $p = 4$.

Logo, o termo procurado é:

$$\binom{8}{4}(-1)^4 \cdot x^{8-2 \cdot 4} = \binom{8}{4} = 70$$

3º) Desenvolvendo $(x + y)^{10}$ em potências de expoentes decrescentes de x, qual é o 6º termo?

Notemos que:

$$\begin{array}{l} \text{o 1º termo conterá } x^{10} \\ \text{o 2º termo conterá } x^{9} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \text{o 6º termo conterá } x^{5} \end{array}$$

Portanto, o termo procurado é:

$$\binom{10}{5} x^5 \cdot y^5 = 252\, x^5y^5$$

Um outro modo de encontrarmos o termo desejado seria notar que, desenvolvendo o binômio em potências de expoentes decrescentes de x, os coeficientes seriam:

$$\begin{array}{ccccc} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots\cdots & \binom{n}{p} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{1º termo} & \text{2º termo} & \text{3º termo} & & (p+1)\text{ termo} \end{array}$$

E, como queremos o 6º termo, devemos tomar o coeficiente binomial $\binom{n}{5}$, que no nosso caso é $\binom{10}{5}$. Portanto, o termo desejado é $\binom{10}{5} x^5y^5 = 252\, x^5y^5$.

EXERCÍCIOS

246. Qual o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(1 - 2x)^6$?

247. Desenvolvendo $(x + 3y)^9$, qual o termo que contem x^4?

248. No desenvolvimento de $(1 - 2x^2)^5$, qual o coeficiente de x^8?

249. Qual o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(x^2 + x^{-3})^8$?

250. Qual o termo em x^3 no desenvolvimento de $\left(x - \dfrac{a^2}{x}\right)^{15}$?

251. Qual o termo em x^3 no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} - \dfrac{a^2}{x}\right)^{15}$?

252. Determine o coeficiente numérico do termo de 4º grau do desenvolvimento do binômio de Newton $(x - 2)^7$.

253. Qual é o coeficiente do termo que contém o fator y^4 no desenvolvimento binomial de $\left(\frac{1}{2}x^2 - y\right)^{10}$?

254. Qual é o coeficiente numérico do termo de grau 1 em *x*, no desenvolvimento de $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$?

255. Determine o coeficiente de x^5 no desenvolvimento binomial de $\left(1 - \frac{2}{3}x\right)^6$.

256. Obtenha o coeficiente do termo em x^{-3} no desenvolvimento de $\left[\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right]^6$.

257. Qual é o coeficiente do termo em x^2 de $\left(\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x}\right)^{12}$?

258. No desenvolvimento de $(x + a)^{100}$, qual o coeficiente do termo que contém x^{60}?

259. Qual é o coeficiente do termo médio de $(x^3 + y^2)^{10}$?

260. Qual o termo independente de *y* no desenvolvimento de $\left(y + \frac{1}{y}\right)^4$?

261. Qual o termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$?

262. Qual o termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(-x + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^8$?

263. Calcule o termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x^2} - \sqrt[4]{x}\right)^{18}$.

264. Obtenha o termo independente de *x* no desenvolvimento do binômio $\left(x + \frac{2}{5x}\right)^8$.

265. Um dos termos no desenvolvimento de $(x + 3a)^5$ é $360x^3$. Sabendo que *a* não depende de *x*, determine o valor de *a*.

266. Determine o valor de *a*, de modo que um dos termos do desenvolvimento de $(x + a)^5$ seja $270x^2$.

267. Qual é o termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{517}$?

268. Que posição ocupa o termo independente de *x* no desenvolvimento de $(3 + 6x^2)^{11}$, se o desenvolvimento for em potências de expoentes decrescentes de *x*?

269. Qual é a condição que *n* deve satisfazer para que o desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ tenha um termo independente de *x*?

270. No desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, pela formula do binômio de Newton, existe um termo que não depende de *x*?

271. Sabendo que o quarto termo do desenvolvimento de $(2x - 3y)^n$ é $-1080x^2y^3$, calcule o terceiro termo desse desenvolvimento.

272. Os três primeiros coeficientes do desenvolvimento de $\left(x^2 + \dfrac{1}{2x}\right)^n$ estão em progressão aritmética. Determine o valor de *n*.

273. Os coeficientes do quinto, sexto e sétimo termos do desenvolvimento de $(1 + x)^n$ estão em progressão aritmética. Se $n \leqslant 10$, calcule o valor de $(2n - 1)$.

274. No desenvolvimento do binômio $(a + b)^{n+5}$, ordenado segundo as potências decrescentes de *a*, o quociente entre o termo que ocupa a $(n + 3)$-ésima posição por aquele que ocupa a $(n + 1)$-ésima é $\dfrac{2b^2}{3a^2}$, isto é: $\dfrac{T_{n+3}}{T_{n+1}} = \dfrac{2b^2}{3a^2}$. Determine o valor de *n*.

275. Qual é o produto do terceiro pelo antepenúltimo termo do desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$?

276. Qual o coeficiente de x^{n+1} no desenvolvimento de $(x + 2)^n \cdot x^3$?

277. Determine o coeficiente de $a^{n+1-p}\, b^p$ no produto de

$$a^k + \binom{k}{1} a^{k-1}\, b + \ldots + \binom{k}{p} a^{k-p}\, b^p + \ldots + b^k \text{ por } (a + b), \text{ para } k = n.$$

278. Qual o valor do termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^6 \cdot \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^6$?

279. Quantos termos racionais tem o desenvolvimento de $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{100}$?

280. Qual é o número de termos racionais no desenvolvimento de $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^{10}$?

281. Calcule aproximadamente $(1{,}002)^{20}$, usando o teorema binomial.

Solução

Vamos mostrar que $(1 + x)^n \cong 1 + nx$ para nx pequeno.

De fato, pelo teorema binomial:

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot x^n$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{3!} x^3 + \ldots x^n$$

porém

$$\left|\frac{n(n-1)\,x^2}{2}\right| < \left|\frac{n^2x^2}{2}\right|$$

$$\left|\frac{n(n-1)\,(n-2)\,x^3}{3!}\right| < \left|\frac{n^3x^3}{3!}\right|$$

etc.

Se nx é pequeno (próximo de zero), então n^2x^2, n^3x^3, etc. são muito pequenos, comparados com nx. Desprezando os termos do desenvolvimento a partir do 3º termo, teremos:

$(1 + x)^n \cong 1 + n \cdot x.$

No nosso exemplo: $(1{,}002)^{20} = (1 + 0{,}002)^{20} \cong 1 + 20 \cdot 0{,}002 = 1{,}04.$

Se calcularmos $(1{,}002)^{20}$ sem a aproximação, obteremos 1,0408.

282. Calcule aproximadamente:

a) $(1{,}002)^{10}$

b) $(0{,}997)^{20}$

283. Usando o binômio de Newton, determine a aproximação, a menos de um centésimo, de $(1{,}003)^{20}$.

284. Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(2x + 3y)^4$?

Solução

$(2x + 3y)^4 = (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 \cdot (3y) + 6 \cdot (2x)^2 \cdot (3y)^2 + 4 \cdot (2x) \cdot (3y)^3 + (3y)^4$

Essa igualdade vale $\forall x, y$ reais; se fizermos $x = 1$ e $y = 1$, teremos:

1º membro: $(2 \cdot 1 + 3 \cdot 1)^4 = 5^4 = 625$

2º membro: $2^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot 3 + 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3^3 + 3^4$

que é exatamente a soma dos coeficientes. Logo, a soma dos coeficientes é 625.

285. Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de:

a) $(3x + 2y)^{10}$?

b) $(5x + y)^8$?

286. Indique a soma dos coeficientes de $(4x + 3y)^4$ sem efetuar o desenvolvimento.

287. Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de:

a) $(x - y)^5$?

b) $(3x - y)^4$?

288. Quando você desenvolve $(5x + 2y)^5$ pelo binômio de Newton, aparecem coeficientes numéricos e potências de *x* e *y*. Determine a soma dos coeficientes numéricos.

289. Determine *p*, sabendo que a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(x + a)^p$ é igual a 512.

290. $(2x - y)^4 = a_1x^4 + a_2x^3y + a_3x^2y^2 + a_4xy^3 + a_5y^4$. Calcule o valor de $\sum_{i=1}^{5} a_i$.

291. A soma dos coeficientes dos termos de ordem ímpar de $(x - y)^n$ é 256. Determine *n*.

292. Sendo 1024 a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x + 1)^m$, calcule *m*.

293. Sabendo que a soma dos coeficientes de $(a + b)^m$ é 256, calcule o número de permutações de $\frac{m}{2}$ elementos.

IV. Triângulo aritmético de Pascal (ou de Tartaglia)

59. É uma tabela onde podemos dispor ordenadamente os coeficientes binomiais: $\binom{n}{p}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
 & \binom{k}{0} & & \binom{k}{1} & & & & & & \binom{k}{k} & \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}
$$

Isto é:

A 1ª linha contém o coeficiente binomial com $n = 0$.

A 2ª linha contém os coeficientes binomiais com $n = 1$.

A 3ª linha contém os coeficientes binomiais com $n = 2$.

....

A kª linha contém os coeficientes binomiais com $n = k$.

etc.

60. Podemos também escrever o triângulo de Pascal substituindo cada coeficiente binomial pelo seu valor, isto é:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

61. Notemos que:

A 1ª linha do triângulo contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^0$.

A 2ª linha do triângulo contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^1$.

A 3ª linha do triângulo contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^2$.

E assim por diante.

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & & & \binom{0}{0} & & & \longrightarrow & (x + a)^0 \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \longrightarrow & (x + a)^1 \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \longrightarrow & (x + a)^2 \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \longrightarrow & (x + a)^3
\end{array}
$$

62. Observação

Na construção do triângulo de Pascal, não e necessária calcular os coeficientes binomiais um a um. Basta usarmos algumas de suas propriedades.

63. Propriedades do triângulo de Pascal

1º) Em cada linha do triângulo, a primeiro elemento vale 1, pois, qualquer que seja a linha, o primeiro elemento é $\binom{n}{0} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \boxed{1} & & & & \\
 & & & \boxed{1} & & 1 & & & \\
 & & \boxed{1} & & 2 & & 1 & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\boxed{1} & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

2º) Em cada linha do triângulo, o último elemento vale 1, pois, qualquer que seja a linha, o último elemento é $\binom{n}{n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \boxed{1} & & & & \\
 & & & 1 & & \boxed{1} & & & \\
 & & 1 & & 2 & & \boxed{1} & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & \boxed{1} & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & \boxed{1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

3º) A partir da 3ª linha, cada elemento (com exceção do primeira e do último) é a soma dos dois elementos da linha anterior, imediatamente acima dele.

Esta propriedade é conhecida como relação de Stifel e afirma que:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}} \quad n \geqslant 2$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

A demonstração desta propriedade está na parte de exercícios resolvidos.

4º) Numa linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais. Isto equivale a demonstrar que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

O que é imediato, pois:

$$\left.\begin{array}{l} \dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \\[2ex] \dbinom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} \end{array}\right\} =$$

64. Exemplos:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \boxed{4} & & 6 & & \boxed{4} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & \boxed{10} & & \boxed{10} & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & \boxed{6} & & 15 & & 20 & & 15 & & \boxed{6} & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & \boxed{35} & & \boxed{35} & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

EXERCÍCIOS

294. Assinale com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas.

a) $\binom{0}{0} = 0$ c) $\binom{4}{0} = \binom{4}{4}$ e) $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$

b) $\binom{8}{8} = 1$ d) $\binom{8}{5} + \binom{8}{4} = \binom{9}{5}$ f) $\binom{8}{0} = \binom{15}{0}$

295. Demonstre que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{i} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solução

Vamos desenvolver $(1 + 1)^n$ pelo teorema binomial.

Temos:

$$2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot 1^1 + \dots + \binom{n}{i} 1^{n-i} \cdot 1^i + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^0$$

Logo, $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{i} + \dots + \binom{n}{n}$.

296. Calcule:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}.$$

297. Calcule o determinante: $\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+2}{1} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \binom{n+3}{1} \end{vmatrix}$

298. Calcule:

a) $\sum\limits_{i=0}^{10} \binom{10}{i}$ b) $\sum\limits_{i=1}^{10} \binom{10}{i}$ c) $\sum\limits_{i=2}^{10} \binom{10}{i}$

299. Calcule *m*, sabendo que: $\sum\limits_{i=1}^{m} \binom{m}{i} = 1023$.

300. Calcule $\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p}$.

301. Calcule $\sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k}$

302. Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Calcule o valor de

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p-n} (-1)^{p} (-1)^{n-p} \binom{n}{p}.$$

303. Determine o valor de $A_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (2^p 3^{n-p} - 4^p)$, para todo $n > 0$.

304. Prove que, se um conjunto A tem *n* elementos, então o número de subconjuntos de A é 2^n.

305. Quantos subconjuntos não vazios possui o conjunto A com *n* elementos?

306. Calcule o valor da expressão:

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

307. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

308. Se $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$ e $(p + q)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$, $n > 0$, demonstre que $\binom{n}{i} p^i q^{n-i}$ é sempre menor do que 1.

309. Verifique que, quando *n* é ímpar,

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... + \binom{n}{n-1}.$$

Sugestão:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1}\right] + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-2} + ... + \binom{n}{3} + \binom{n}{1}\right] = 2^n$$

310. Prove que:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$$

Solução

Sabemos que:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

Derivando membro a membro em relação a *x*, temos:

$$n \cdot (1 + x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

Fazendo $x = 1$ nesta igualdade, resulta:

$n \cdot 2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$, que é o que queríamos demonstrar.

311. Prove que:

$$2 \cdot 1\binom{n}{2} + 3 \cdot 2\binom{n}{3} + 4 \cdot 3\binom{n}{4} + \ldots + n \cdot (n-1)\binom{n}{n} = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}$$

312. Demonstre a relação de Euler.

$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{p-2} + \ldots + \binom{m}{p}\binom{n}{0}$$

Sugestão: $(1 + x)^{m+n} = (1 + x)^m \cdot (1 + x)^n$; desenvolva cada membro e identifique os coeficientes dos termos semelhantes.

313. Usando a relação de Euler, prove que:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$$

314. Demonstre a relação de Stifel, isto é:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \text{ e } p \leqslant n.$$

Solução

Consideremos um conjunto A com *n* elementos, e consideremos um deteminado elemento $a \in A$. Vamos calcular o número de combinações dos elementos de A, tomados *p* a *p*, de dois modos:

1º modo: Diretamente pela fórmula, isto é, $\binom{n}{p}$ (1)

2º modo: Calculamos o número de combinações que não possuam o elemento *a*.

Tal número é $\binom{n-1}{p}$.

Em seguida, calculamos o número de combinações que possuem o elemento *a*. Tal número é $\binom{n-1}{p-1}$.

Ao todo, o número de combinações será:

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad (2)$$

De (1) e (2) concluímos que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

315. Demonstre que a soma dos quadrados dos *n* primeiros números inteiros positivos é:

$$S = \frac{n\,(2n+1)\,(n+1)}{6}.$$

Sugestão: Use a identidade

$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

e faça x assumir os valores 1, 2, 3, ..., n.

316. Escreva *n* parcelas contendo o desenvolvimento de $(k + 1)^3$ para $k = 1, 2, 3, ..., n - 1, n$. Some todas as parcelas, elimine os termos semelhantes e obtenha $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

317. Mostre que, se $n (n \geqslant 2)$ é par, os valores de $\binom{n}{p}$ para $p = 0, 1, 2, ..., n$ vão crescendo, atingem um valor máximo para $p = \frac{n}{2}$ e depois vão decrescendo.

Solução

Consideramos dois coeficientes binomiais consecutivos $\binom{n}{p-1}$ e $\binom{n}{p}$ e calculemos seu quociente:

$$\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p-1}} = \frac{\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}}{\dfrac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!}} = \frac{n-p+1}{p}$$

a) Os valores de $\binom{n}{p}$ irão crescendo até atingir o máximo se, e somente se, $\frac{n-p+1}{p} > 1$.

Portanto:

$n - p + 1 > p \Leftrightarrow n + 1 > 2p \Leftrightarrow p < \frac{n+1}{2}$

Isto é, $\binom{n}{p}$ irá crescendo, quando *p* variar de 0 até o menor inteiro que não supera $\frac{n+1}{2}$, que é $\frac{n}{2}$.

b) Os valores de $\binom{n}{p}$ irão decrescendo se, e somente se, $\frac{n-p+1}{p} < 1$.

Portanto:

$n - p + 1 < p \Leftrightarrow n + 1 < 2p \Leftrightarrow p > \frac{n+1}{2}$

Isto é $\binom{n}{p}$ irá decrescendo, quando *p* variar de $\frac{n}{2} + 1$ até *n*.

c) De (a) concluímos que o maior valor de $\binom{n}{p}$ é atingido para $p = \frac{n}{2}$.

Exemplo:

Os coeficientes binomiais para $n = 4$ são:

$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$
1	4	6	4	1
	$\rightarrow$ aumenta	$\uparrow$ valor máximo	$\rightarrow$ diminui	

318. Mostre que, se *n* é impar, os valores de $\binom{n}{p}$ para $p = 0, 1, 2, ..., n$ vão crescendo, atingirão valor máximo para dois valores de p $\left(p = \frac{n-1}{2} \text{ e } p = \frac{n+1}{2}\right)$ e em seguida vão decrescendo.

319. Determine a condição para que $\binom{n}{k}$ sejá o dobro de $\binom{n}{k-1}$.

320. Sejá $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{100}x^{100}$, em que $a_{100} = 1$, um polinômio divisível por $(x + 9)^{100}$. Calcule o valor de a_2.

321. Resolva a equação trigonométrica:

$\text{sen}^4x - 4 \cdot \text{sen}^3x + 6 \cdot \text{sen}^2x - 4 \cdot \text{sen}\, x + 1 = 0$

utilizando o binômio de Newton.

322. Calcule *p* na equação $\binom{14}{3p} = \binom{14}{p+6}$.

Solução

Já vimos que a equação em *x*, $\binom{n}{x} = \binom{n}{p}$, tem solução para $x = p$ ou $x = n - p$. Em virtude das propriedades dadas nos exercícios 318 e 317, isto é, os binomiais $\binom{n}{x}$ crescem inicialmente, atingem um, ou dois valores máximos, e depois decrescem, concluímos que $\binom{n}{x} = \binom{n}{p}$ para no máximo dois valores de *x* que, conforme já vimos, são $x = p$ e $x = n - p$.

Portanto, a solução da equação dada é:

$$\begin{cases} 3p = p + 6 & (1) \\ \quad\quad \text{ou} & \\ 3p = 14 - (p + 6) & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow p = 3$ ou $(2) \Rightarrow p = 2$

323. Sendo $\binom{10}{p-3} = \binom{10}{p+3}$, calcule *p*.

324 Resolva $\binom{14}{x} = \binom{14}{2x-1}$.

325. Resolva a equação $\binom{12}{p+3} = \binom{12}{p-1}$.

326. Determine *m* para que $\binom{11}{m-1} = \binom{11}{2m-3}$.

327. Uma pessoa possui um certo número *m* de objetos distintos. Agrupando-os 3 a 3 de modo que cada grupo difira do outro por possuir pelo menos um objeto diferente, obtém-se o mesmo número de grupos se os juntar 5 a 5, do mesmo modo.

Determine $\binom{m}{3}$.

328. Sendo *m*, *p* e *q* números inteiros e positivos, com $q < p$ e $\binom{m}{p+q} = \binom{m}{p-q}$. Determine a relação entre eles.

329. Sabendo que $\binom{m-1}{p-1} = 10$ e $\binom{m}{m-p} = 55$, calcule $\binom{m-1}{p}$.

330. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros positivos. Determine o conjunto de todos os $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, para os quais $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}$.

331. Qual(is) o(s) maior(es) coeficiente(s) binomial(is) $\binom{n}{p}$ para:

a) $n = 12$?

b) $n = 15$?

332. Qual o termo de maior coeficiente no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} + y^2\right)^{10}$?

V. Expansão multinomial

65. Já vimos como é possível obter o desenvolvimento de um binômio $(x + a)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vamos agora, com raciocínio semelhante, obter o desenvolvimento de expressões do tipo $(x + y + z)^n$, $(x + y + z + t)^n$, etc. $(n \in \mathbb{N})$, em que a base da potência de expoente *n* é um polinômio.

66. Exemplo 1:

$$(x + y + z)^5 = \underbrace{(x + y + z) \cdot (x + y + z) \cdot (x + y + z) \cdot (x + y + z) \cdot (x + y + z)}_{\text{5 fatores}}$$

Pela propriedade distributiva da multiplicação, devemos tomar um termo de cada fator (escolhidos entre *x*, *y*, *z*) e, em seguida, multiplicá-los. Feitas todas as escolhas possíveis e multiplicados os termos, a soma desses produtos será o desenvolvimento de $(x + y + z)^5$. Os tipos de produtos que podemos obter são da forma

$$x^i \cdot y^j \cdot z^k$$

em que $i, j, k \in \mathbb{N}$ e $i + j + k = 5$.

Para cada *i*, *j*, *k* fixados, o coefieiente do termo $x^i \cdot y^j \cdot z^k$ será o número de sequências de cinco letras, com *i* letras *x*, *j* letras *y* e *k* letras *z*, isto é:

$$P_5^{i,\,j,\,k} = \frac{5!}{i!\;j!\;k!}$$

Portanto, o coeficiente de $x^i \cdot y^j \cdot z^k$ é $\dfrac{5!}{i!\;j!\;k!}$.

Tomando todos os termos do tipo $x^i \cdot y^j \cdot z^k$ para $i, j, k \in \mathbb{N}$ e $i + j + k = 5$ e calculando os seus coeficientes, a soma deles, precedidos pelos respectivos coeficientes, dará a expansão de $(x + y + z)^5$.

Em particular, o coeficiente do termo $x^2 \cdot y^2 \cdot z$ será:

$$P_5^{2,\,2,\,1} = \frac{5!}{2!\;2!\;1!} = 30$$

Portanto, o termo em x^2y^2z será $30x^2 \cdot y^2 \cdot z$.

De um modo geral, a expansão do polinômio, $(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$, com $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ será

$$\sum \left(\frac{n!}{n_1!\; n_2!\; \ldots\; n_r!}\, x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r} \right)$$

em que a soma é estendida para:

$$\begin{cases} n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N} \\ \qquad\quad \text{e} \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n \end{cases}$$

67. Exemplo 2:

Qual o coeficiente de xyz no desenvolvimento de $(x + y + z)^3$?

O coeficiente de xyz é:

$$P_3^{1,\,1,\,1} = \frac{3!}{1!\;1!\;1!} = 6$$

68. Exemplo 3:

Qual o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^{10}$?

O termo genérico é:

$$\frac{10!}{i!\,j!\,k!}(1)^1 \cdot (x)^j \cdot (x^2)^k = \frac{10!}{i!\,j!\,k!}\,x^{j+2k}$$

Devemos impor que $j + 2k = 5$. Vamos resolver essa equação, atribuindo valores para *j* e notando que *i* está automaticamente determinado pela condição $i + j + k = 10$.

j	k	i
1	2	7
3	1	6
5	0	5

Notemos que para $j = 0$ ou $j = 2$ ou $j = 4$ ou $j = 6$ ou $j = 7$ ou $j = 8$ ou $j = 9$ ou $j = 10$ não existe $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $j + 2k = 5$.

Temos, então:

1) $i = 7; j = 1; k = 2$

O coeficiente de x^5 será: $\dfrac{10!}{7!\,1!\,2!} = 360$

2) $i = 6; j = 3; k = 1$

O coeficiente de x^5 será: $\dfrac{10!}{6!\,3!\,1!} = 840$

3) $i = 5; j = 5; k = 0$

O coeficiente de x^5 será: $\dfrac{10!}{5!\,5!\,0!} = 252$

Logo, o coeficiente de x^5 (desenvolvendo todo o polinômio) será:

$$(360 + 840 + 252) = 1452$$

EXERCÍCIOS

333. Desenvolvendo o polinômio $(x + y + z)^4$, qual o coeficiente do termo em x^2yz? E do termo xyz^2?

334. Qual o coeficiente do termo em $x^2y^3z^2$ no desenvolvimento de $(x + y + z)^7$?

335. Mostre que o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(1 + 3x + 2x^2)^{10}$ é 3 780.

336. Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(x + y + z)^5$?

337. Determine o termo independente de *x* em $\left(1 + x + \dfrac{2}{x}\right)^3$.

338. Qual é o coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $(1 + x^2 - x^3)^9$?

LEITURA

Pascal e a teoria das probabilidades

Hygino H. Domingues

Somente cerca de cem anos depois de Girolamo Cardano escrever seu *Liber de ludo aleae* (em torno de 1550; ver pág. 57), obra considerada o marco inicial da teoria das probabilidades, seria dado o passo seguinte (e decisivo) para a criação dessa área da matemática.

O cenário agora era a França, onde o requintado nobre francês Antoine Gambaud, o Chevalier de Méré, como Cardano um inveterado jogador, estava às voltas com problemas como: "Dois jogadores de igual habilidade resolvem interromper o jogo antes do término. Sendo conhecido o número de pontos de cada um até essa altura, em que proporção devem ser divididas as apostas?". Apesar de possuir várias ideias aritméticas sobre o assunto, fruto de sua experiência e perspicácia, Gambaud decidiu recorrer ao grande matemático francês Blaise Pascal (1623-1662), em busca de segurança. Este se entusiasmou tanto com as questões que até iniciou correspondência a respeito com seu conterrâneo Pierre de Fermat, resultando desse intercâmbio as bases da moderna teoria das probabilidades.

Órfão de mãe aos 3 anos de idade, Pascal foi educado por seu pai, um intelectual respeitado, com ideias pedagógicas não muito convencionais. Assim é que, segundo seus preceitos, considerando a débil saúde do filho, achava que ele só deveria começar a aprender geometria aos 15 anos de idade. Mas o menino Pascal, aos 12 anos de idade, tentou reinventar sozinho aquele saber proibido a ele, comoveu o pai e acabou ganhando um exemplar da obra *Elementos*, de Euclides. Aos 14 passou a frequentar as reuniões científicas promovidas pelo matemático M. Mersenne (1588-1648) das quais participavam Descartes,